UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Master 1ère année
Année 2008/2009

Probabilités de base : contrôle continu no. 1

lundi 13 octobre 2008 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Montrer que $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{R} : \ A \text{ ou } A^c \text{ soit au plus dénombrable}\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec la tribu engendrée par les singletons de $\mathbb{R}$.

Exercice II.

Prouver que $\mathrm{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geqslant \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) - n + 1$, quelque soient les événements $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Exercice III.

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $(0 < p < 1,\ n \geqslant 1$ entier). Calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice IV.

Sur l'espace de probabilité $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$, avec λ la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$, on considère la variable aléatoire $C(\omega) = \tan(\pi\omega - \frac{\pi}{2})$. Montrer que la densité de C est $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Quelle est la densité de $\dfrac{1}{C}$?

Exercice V.

Soit X une variable aléatoire réelle. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction croissante, montrer que $h(X)$ est une variable aléatoire positive et que $\mathrm{P}(X \geqslant t) \leqslant \dfrac{\mathrm{E}(h(X))}{h(t)}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose maintenant que $X \in \mathrm{L}^2$ est centrée avec $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X) > 0$. Montrer que $\mathrm{P}(X \geqslant t) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. On pourra utiliser la fonction $h(x) = (x+c)^2$, $c > 0$.