UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Licence 3ème année
Année 2007/2008

Espaces vectoriels normés : contrôle continu no. 1

vendredi 8 février 2008 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Soient $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ et $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ deux suites de Cauchy dans un espace vectoriel normé quelconque E. On note $a_n = \|x_n - y_n\|$, $n \geqslant 1$. Montrer que la suite $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Exercice II.

Pour $n \geqslant 1$ on pose $x_n := (\underbrace{2^{-n}, 2^{-n}, \ldots, 2^{-n}}_{\text{premières } 2^n \text{ places}}, 0, 0, \ldots)$. Utiliser la suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ pour montrer que l'espace vectoriel ℓ_1 est de dimension infinie.

Exercice III.

Soit $\mathcal{P}_4$ l'ensemble des polynômes d'une seule variable complexe de degré au plus 4. Définissons $\|p\| := \sum_{j=0}^{4} |p(j)|$, $p \in \mathcal{P}_4$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme et que $\mathcal{P}_4$ muni de cette norme est un espace de Banach mais n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice IV.

Soit $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et on introduit la fonction $t \mapsto t\int_0^t x(s)ds =: (Tx)(t)$. Montrer que $(Tx) : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et que $T : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ est un opérateur linéaire continu sur l'espace $\mathrm{C}([0,1])$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$. Calculer la norme de l'opérateur T. Vérifier qu'il existe l'inverse $T^{-1} : R(T) \to \mathrm{C}([0,1])$ mais que ce n'est pas un opérateur borné. On pourra considérer y_p, $p > 0$ arbitraire, où $y_p := Tx_p$ avec $x_p(t) = t^p$, $t \in [0,1]$.