Université de Rennes 1 — Année 2020-2021
Licence de Mathématiques — L2 CMR et L3 SSF

Contrôle continu # 1

le 8 février 2021 ; durée 1 heure

Il sera tenu compte dans l'évaluation du soin apporté à la rédaction.

Justifier vos réponses et affirmations. Bon travail !

Exercice 1 *Questions de cours ou presque*
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient E un e.v.n., $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$. On pourra commencer par énoncer au moins une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point x soit adhérent à une partie de E.
2. Enoncer la négation de la caractérisation séquentielle de la limite en un point d'une fonction. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ et soient les suites $(1/n^2, 1/n)$ et $(1/n, 0)$.
La limite de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe-t-elle ?
3. Soient $K \subset E$ et $L \subset F$ deux compacts dans deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$. Montrer que dans l'espace vectoriel $E \times F$ muni de la norme $\|(x,y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$, l'ensemble $K \times L$ est compact. On pourra utiliser les sous-suites des sous-suites.

Exercice 2 *Un sous-espace dans ℓ^2*
On note $\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R}) = \Big\{ u = (u_k)_{k\geq 0} \text{ suite réelle } : \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < +\infty \Big\}$ l'espace vectoriel des suites réelles de carrés sommables et soit $\|u\|_2 = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 \Big)^{1/2}$.

a) Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur l'espace vectoriel ℓ^2. Provient-elle d'un produit scalaire ?
b) Montrer que l'ensemble $G = \Big\{ u \in \ell^2 : \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| < +\infty \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} u_k = 0 \Big\}$ est un sous-espace vectoriel de ℓ^2.
c) On introduit pour tout $n \geq 1$, $u^{(n)} = (-1, 1/n, 1/n, \ldots, 1/n, 0, \ldots)$, avec n fois la valeur $1/n$. Vérifier que $u^{(n)} \in G$ pour tout $n \geq 1$.
d) On pose $b = (-1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Calculer $\|u^{(n)} - b\|_2$ et déduire que la suite d'éléments de G $\{u^{(n)} : n \geq 1\}$ est convergente vers $b \in \ell^2$.
e) G est-elle une partie fermée de ℓ^2 ?

Exercice 3 *Suites de matrices*
Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ muni d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ qui satisfait $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$. Soit A une matrice de E telle que la suite $S_n = I + A + \ldots + A^n$ converge, lorsque $n \to \infty$, vers une matrice S.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = O$, avec O la matrice nulle.
b) Montrer que $I - A$ est inversible et que $(I-A)^{-1} = S$. On pourra d'abord calculer explicitement les produits $P_n = (I-A)S_n$, $Q_n = S_n(I-A)$ et ensuite trouver leurs limites.