Université de Rennes 1 — Année 2019-2020
Licence de Mathématiques — L2 CMR et L3 SSF

Contrôle continu # 1

le 3 février 2020 ; durée 1 heure ; documents, calculatrices et téléphones interdits

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *Limites et continuité*

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Étudier la limite en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Énoncer et démontrer une minoration pour la norme $\|x-y\|$ de la différence de deux éléments $x, y \in E$. En déduire la continuité de l'application $x \mapsto \|x\|$.

Exercice 2 *Suites de matrices*

Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ on considère une norme d'algèbre $\|\cdot\|$, c'est-à-dire qu'elle satisfait $\|UV\| \leq \alpha \|U\| \, \|V\|$ pour toutes les matrices $U, V \in E$, avec $\alpha > 0$ une constante (universelle).

1. Soient deux suites de matrices (U_n) et (V_n) qui convergent, respectivement, vers U et V. Montrer que la suite $(U_n V_n)$ converge vers UV.
2. On considère A, B deux matrices de E telles que $\lim_{n\to\infty} A^n = B$.

   Montrer que $B^2 = B$ et que $AB = BA$. On pourra utiliser le point précédent.

Exercice 3 *Comparer deux normes*

Sur $E = \mathrm{C}^1([0,1]; \mathbb{R})$ on introduit, $\|f\| = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, pour toute fonction $f \in E$.

1. Montrer que ces deux quantités définissent des normes sur E.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ ne domine pas $\|\cdot\|$ en utilisant la suite $(f_n)_{n\geq1}$ donnée par : $\forall n \geq 1,\ f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{n}$, $t \in [0,1]$.
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge vers la fonction nulle en norme $\|\cdot\|_\infty$.
   (b) Calculer $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|$ et conclure.
3. Montrer que $\|\cdot\|$ domine $\|\cdot\|_\infty$: $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f\|$.