Université de Rennes 1 — Année 2018-2019
Licence de Mathématiques — L2 CMR et L3 SSF

Contrôle continu # 1

le 11 février 2019 ; durée 1 heure ; documents, calculatrices et téléphones interdits
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *Vrai ou faux*
Que pensez-vous de chacun des énoncés suivants ?
Fournir une démonstration si vous pensez que c'est vrai, sinon donner un contre-exemple.

1) Aline dit : si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si on note $B_1 = \{x \in E : N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E : N_2(x) \leq 1\}$, alors il existe $c, k > 0$ tels que $c\,B_1 \subset B_2 \subset k\,B_1$.
2) Béatrice dit : N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(u) := |2x + 7y|$, avec $u = (x, y)$, est une norme.
3) Camille dit : si A, B sont deux parties d'un espace vectoriel normé tels que $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
4) Dominique dit : si deux boules $\overline{B}(a, r)$ et $\overline{B}(a', r')$ de $E \neq \{0\}$ sont égales, alors $a = a'$ et $r = r'$.
5) Emilie dit : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x, y, z) = \dfrac{xy + yz}{3x^2 + 2y^2 + z^2}$ admet une limite en l'origine.
6) Florence dit : $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad g(x, y) = \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ admet une limite en l'origine.
7) Gabrielle dit : sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\left\| \sum_i a_i X^i \right\| = \sum_i |a_i|$, l'application $\phi : E \to E$ donnée par $\phi : P(X) \mapsto P(X + 1)$ est linéaire et continue.

Exercice 2 *Norme 2 perturbée*
Soient $a, b > 0$. On pose pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(u) := \sqrt{a\,x^2 + b\,y^2}$.

1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer le plus petit nombre $M > 0$ et le plus grand nombre $m > 0$ tels que $m\,\|u\|_2 \leq N(u) \leq M\,\|u\|_2$, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$. Rappel $\|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Bonus A : La norme N provient-elle d'un produit scalaire ?
- Bonus B : Dessiner la boule unité de centre $(0, 0)$.