Université de Rennes 1 — Année 2017-2018
Licence 2ème Mathématiques — Compléments Math Recherche

Contrôle continu # 1

le 13 février 2018 ; durée 1h10 heure ; documents, calculatrices et téléphones interdits
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Donner la définition d'une partie convexe de E. Montrer que toute boule fermée de E est convexe.
2) Montrer que si C est une partie convexe de E alors son adhérence $\overline{C}$ est convexe. On pourra énoncer et utiliser la caractérisation avec des suites d'un point adhérent à C.
3) Soit $\ell : E \to E$ une application linéaire. Montrer que ℓ est continue si et seulement elle est continue en 0_E.
   Bonus : Montrer que ℓ est continue si et seulement $\exists M > 0, \forall x \in E,\ \|\ell(x)\| \leq M\|x\|$.

Exercice 2 *Limites et continuité*
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1) Étudier l'existence de la limite de la fonction $f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}$ au point $(0,0)$.
   Même question pour $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. On pourra introduire $r := \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
2) On munit $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de la norme suivante $\|P\| = \max_{k\geq 0} |a_k|$, où $(a_k)_{k\geq 0}$ sont les coefficients du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour $c \geq 0$ on considère, l'application $\phi_c : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, donnée par $\phi_c(P) = P(c)$. Vérifier que l'application ϕ_c est linéaire. Montrer que, lorsque $0 \leq c < 1$, l'application ϕ_c est continue.
   Bonus : ϕ_c est-elle continue lorsque $c = 1$ ou $c > 1$?

Exercice 3 *Une norme sur $\mathbb{R}^2$*
Pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $N(u) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

a) Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une norme.
b) Montrer que, $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $N(u) \leq N_2(u)$, où $N_2(u) := \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x^2+y^2}$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Bonus : Étudier les variations de la fonction $t \mapsto \frac{|x+ty|^2}{1+t^2}$ et déduire que, $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $N(u) \geq N_2(u)$.