Université de Rennes 1 Année 2021-2022
Master 1 Mathématiques Analyse Fonctionnelle

CONTRÔLE CONTINU # 1

le 13 octobre 2021 ; durée 75 minutes ; résumé sur une feuille format A4 autorisé

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Dans cet exercice E désigne un e.v.n. et G un sous-espace vectoriel fermé de E.

i) Soit $E = \ell^1$ muni de sa norme usuelle et $G = \{(\xi_n) \in \ell^1 : \xi_1 - 3\xi_2 = 0\}$. On considère $g : G \to \mathbb{R}$ par $g\big((\xi_n)\big) = \xi_1$ et on introduit $f : E \to \mathbb{R}$ par $f\big((\xi_n)\big) = 3\big(\xi_1 + \xi_2\big)/4$, $\forall (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Vérifier que f est une extension de Hahn-Banach de g et discuter l'unicité.

ii) On rappelle qu'on note $d(x, G)$ la distance de $x \in E$ à G.

(a) Montrer que si $x \notin G$, $\exists f \in E'$ telle que $f_{\big|G} = 0$, $f(x) = 1$ et $\|f\| = 1/d(x, G)$.

Pour les questions b)-d) suivants on suppose que E est séparable et soit $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ une suite dense de E.

b) Déduire que $\forall n \geq 1$, $\exists f_n \in E'$ telle que $(f_n)_{|G} = 0$, $\|f_n\| \leq 1$ et $f_n(x_n) = d(x_n, G)$.

c) Montrer que $d(x, G) = \sup_{n\geq 1} |f_n(x)|$, $\forall x \in E$ et ensuite déduire que $G = \cap_{n\geq 1} \mathrm{Ker}(f_n)$.

d) Enfin montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la boule unité fermée $B_{E'}$ telle que $\|x\| = \sup_{n\geq 1} |f_n(x)|$ pour tout $x \in E$ et $\cap_{n\geq 1} \mathrm{Ker}(f_n) = \{0\}$.

iii) Soit A un sous-ensemble de l'e.v.n. E. Montrer que A est borné (il existe $r > 0$ telle que $\|a\| \leq r$ pour tout $a \in A$) ssi il est faiblement borné (pour toute $f \in E'$, il existe $r_f > 0$ telle que $|f(a)| \leq r_f$, pour tout $a \in A$. On pourra faire intervenir la projection canonique J_E.

Exercice 2 *Projections dans un espace de Banach*
Soit E un espace de Banach et F, G deux sous-espaces vectoriels fermés tels que $E = F \oplus G$. On définit les opérateurs P_F et P_G en posant $P_F : E \to E$, $f + g \mapsto f$ et $P_G : E \to E$, $f + g \mapsto g$.

i) Montrer que P_F, P_G sont linéaires bornés et $P_F^2 = P_F$, $P_G^2 = P_G$ et que $P_F P_G = P_G P_F = 0$.

ii) On ne suppose plus que la somme des sous-espaces fermés $F \oplus G$ soit l'espace tout entier.

(a) Montrer que $F \oplus G$ est fermé ssi il existe $C > 0$ telle que $\|f\| \leq C\|f + g\|$, $\forall f \in F$, $\forall g \in G$.

(b) En déduire que $F \oplus G$ est fermé ssi $c = \inf\{\|f - g\| : f \in F, g \in G, \|f\| = \|g\| = 1\} > 0$.

Exercice 3 *Normes sur L^p*
On considère $1 \leq p < \infty$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété suivante : si $\|f_n - f\| \to 0$ alors il existe une sous-suite telle que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.p.}} f$. On suppose de plus que $\big(\mathrm{L}^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|\big)$ est un espace de Banach. Montrer que l'application id : $\big(\mathrm{L}^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|\big) \to \big(\mathrm{L}^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\big)$ donnée par $\mathrm{id}\, f = f$ est continue et ensuite déduire que $\|\cdot\|$ et la norme usuelle $\|\cdot\|_p$ sur $L^p(\mathbb{R})$ sont équivalentes.