Université de Rennes 1 — Année 2020-2021
Master 1 Mathématiques — Analyse Fonctionnelle

Contrôle continu # 1

le 6 octobre 2020 ; durée 75 minutes ; résumé sur une feuille format A4 autorisé

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*

i) Soit E un espace de Banach et soit $W \subset E$ un sous-espace de E. Montrer que W est un espace de Banach (avec la norme induite de E) si et seulement si W est un fermé dans E.

ii) Soient $E,\ F$ deux espaces vectoriels normés tel que $E \neq \{0\}$ et tel que $B(E,F)$ est un espace de Banach. Montrer que F est un espace de Banach.

On pourra étudier $T_n x = f_0(x) y_n$, où $f_0 \in E'$ est choisie convenablement de norme 1, à l'aide d'un $x_0 \in E$ aussi de norme 1, et où (y_n) est une suite de Cauchy dans F.

iii) Soient $\big(E_j, \|\cdot\|_{E_j}\big)$ $j = 0,1,2$ trois espaces de Banach, et $T_1 : D_1 \subset E_0 \to E_1$ et $T_2 : D_2 \subset E_0 \to E_2$, avec $D_1 \subset D_2$, deux applications linéaires telles que leurs graphes $\Gamma_j := G(T_j)$, $j = 1,2$ soient fermés. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in D_1, \quad \|T_2 x\|_{E_2} \leq C\big(\|T_1 x\|_{E_1} + \|x\|_{E_0}\big).$$

On pourra étudier la continuité de l'application identité $I : \big(D_1, \|\cdot\|_{\Gamma_1}\big) \to \big(D_2, \|\cdot\|_{\Gamma_2}\big)$, où $\|x\|_{\Gamma_j} = \|x\|_{E_0} + \|T_j x\|_{E_j}$ sont les normes des graphes des T_j.

Exercice 2 *La distance vers le noyau*

Soit E un espace vectoriel normé et soit $f \in E' \setminus \{0\}$ une forme linéaire continue non-nulle. On pose $H = \{x \in E : f(x) = 0\}$ et on note $\mathtt{d}(x,H) = \inf\{\|y - x\| : y \in H\}$.

i) Montrer que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq \|f\|_{E'}\, \mathtt{d}(x,H)$.

ii) Soit $v \in H^c$. Montrer que $\mathtt{d}(x,H) \leq \dfrac{|f(x)|}{|f(v)|}\|v\|$.

iii) En déduire que pour tout $x \in E$, $\mathtt{d}(x,H) = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}}$.

iv) Soit $c_0(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ et tendant vers 0 à l'infini muni de la norme uniforme $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

   a) On définit $f : c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x_n}{2^n}$. Montrer que $f \in c_0(\mathbb{N})' \setminus \{0\}$.

   La norme $\|f\|$ dans $c_0(\mathbb{N})'$ est-elle atteinte ?

   b) On pose $H = \mathrm{Ker}(f)$. Calculer $\mathtt{d}(x,H)$. Que peut-on remarquer ?

Exercice 3 *Espace ℓ^∞ et théorème de Hahn-Banach*

Montrer qu'il existe une forme linéaire f sur l'ensemble des suites réelles bornées $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$, telle que pour toute telle suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on ait

$$\liminf_{n\to\infty} u_n \leq f(u) \leq \limsup_{n\to\infty} u_n.$$

Vérifier ensuite que $\|f\| \leq 1$.

On pourra poser $p(u) = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n$ et $G \subset E$ le sous-espace vectoriel des suites convergentes.