Université de Rennes 1 — Année 2018-2019

Master 1 Mathématiques et Applications — Chaînes de Markov et martingales

CONTRÔLE CONTINU # 1

le 15 octobre 2018 ; durée 80 minutes ; une feuille résumé autorisée

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)$-martingale et T un temps d'arrêt définis sur une espace de probabilité.

i) Montrer que T et $\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}X_T$ sont deux variables aléatoires $\mathcal{F}_T$-mesurables.

ii) Montrer que $H_n := \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}$ est un processus prévisible, c'est-à-dire que $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

iii) Montrer que $X_{n\wedge T} = X_0 + (H.X)_n$ et déduire que $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

iv) On suppose ici que $T \leq \kappa$ et soit S un deuxième temps d'arrêt tel que $S \leq T$. Montrer que $X_T - X_S = (K.X)_\kappa$ où on a posé $K_n := \mathbb{1}_{\{S<n\leq T\}}$. En déduire que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_S)$.

Exercice 2 *Lois uniformes et conditionnement*

i) Soit $a > 0$. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $]0,1[$ et soit V une variable aléatoire à valeurs positives, indépendante de U, telle que V^a soit intégrable. Montrer que la variable aléatoire
$$W := 2U(V+U^2)^a$$
est intégrable et calculer $\mathbb{E}(W|V)$.

ii) Soit (S,T) un couple de variables aléatoires admettant la loi uniforme dans un triangle, c'est-à-dire ayant la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ (faire un dessin) :
$$f(s,t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer les lois conditionnelles de S sachant T et de T sachant S.

b) En déduire les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[S|T]$ puis $\mathbb{E}[T|S]$.

Exercice 3 *Conditionnement par une filtration finie*

On considère l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ est la tribu borélienne et $\mathbb{P}$ est la mesure de Lebesgue. On fixe $\kappa > 1$ un entier et $\alpha > 0$ un réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit
$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left]\frac{j}{\kappa^n}, \frac{j+1}{\kappa^n}\right], \quad 0 \leq j \leq \kappa^n - 1 \right).$$
Enfin, on considère la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par $X_n(\omega) := \alpha^n \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{\kappa^n}\right]}(\omega)$, pour $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$.

i) Montrer que la suite $(\mathcal{F}_n)$ est une filtration de l'espace $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

ii) On rappelle que toute variable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{F}_n-$mesurable est de la forme
$$Z(\omega) = \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} \beta_j \mathbb{1}_{\left]\frac{j}{\kappa^n},\frac{j+1}{\kappa^n}\right]}(\omega), \quad \text{avec} \ \beta_j \in \mathbb{R} \ \text{pour} \ 0 \leq j \leq \kappa^n - 1.$$
Montrer que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{\alpha^{n+1}}{\kappa}\mathbb{1}_{\{X_n>0\}}$.

iii) Pour quelles valeurs de α la suite (X_n) est-elle une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$? Une sousmartingale ? Une surmartingale ?

iv) Pourquoi la (sur)martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement ? Déterminer la limite presque sûre de X_n, lorsque n tend vers l'infini. Si $\alpha \leq 1$, la convergence a-t-elle lieu dans $\mathbb{L}^p$, $p > 1$?