Université de Rennes 1 — Année 2017-2018

Master 1 Mathématiques et Applications — Chaînes de Markov et martingales

# Contrôle continu # 1

le 12 octobre 2017 ; durée 1 heure ; une feuille résumé autorisée

**Exercice 1** *Questions de cours (ou presque)*

(a) Soient $X, Y \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires réelles et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On pose $X' = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, $Y' = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ et on note $x \vee y = \max(x, y)$. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[X \vee Y|\mathcal{G}\big] \geq \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{X' \geq Y'\}}X + \mathbb{1}_{\{X' < Y'\}}Y\big|\mathcal{G}\big] = X' \vee Y'.$$

En déduire que si $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux sousmartingales par rapport à la même filtration alors $(X_n \vee Y_n)_{n\geq 0}$ est également une sousmartingale.

(b) Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une sousmartingale et $T$ un temps d'arrêt (pour la même filtration) tel que $T \leq k_0$ p.s., avec $k_0 \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $M_T$ est une v.a. intégrable vérifiant $\mathbb{E}(M_T) \leq \mathbb{E}(M_{k_0})$. On pourra utiliser l'inégalité (à justifier succintement) : $\forall n \leq k_0$, $M_n \leq \mathbb{E}\big[M_{k_0}|\mathcal{F}_n\big]$ p.s.

**Exercice 2** *Loi du couple et loi conditionnelle*

Soit $(X, Y)$ un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k, Y \leq t) = \mu \int_0^t \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)y} dy, \qquad \text{où } \lambda, \mu > 0.$$

Que vaut $\mathbb{P}(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$ ? Calculer $\mathbb{E}[h(Y)|X = k]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $h(Y)$ soit intégrable. En déduire $\mathbb{E}\big[\frac{Y}{X+1}\big]$. Calculer $\mathbb{P}(X = k|Y)$ et trouver $\mathbb{E}(X|Y)$.

**Exercice 3** *La double mise*

Andreï dispose d'un capital initial $X_0 = 1$. Il joue à un jeu de hasard dans lequel il mise à chaque tour une proportion $\lambda \in ]0, 1]$ de son capital : il a une chance sur deux de gagner le double de sa mise, sinon il perd sa mise. Ainsi, après la $n$-ième partie, le capital d'Andreï est

$$X_n = (1 - \lambda)X_{n-1} + \lambda X_{n-1}\, \epsilon_n, \quad n \geq 1,$$

où $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(\epsilon_1 = 2) = \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$.

1. Montrer que $(X_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale et calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
2. Discuter la convergence presque sûre de $(X_n)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ par récurrence sur $n$. On pourra écrire $X_n^2 = X_{n-1}^2\Big[\big((1-\lambda) + \lambda\epsilon_n\big)^2\Big]$.

   Que peut-on dire sur la convergence dans $\mathrm{L}^2$ de $(X_n)$ ?
4. On suppose dans la suite que Andreï mise à chaque partie la totalité de son capital (c'est-à-dire que $\lambda = 1$).
   (a) Trouver la loi de $X_n$.
   (b) Déterminer la limite presque sûre de $(X_n)$.
   (c) Discuter la convergence de $(X_n)$ dans $\mathrm{L}^1$.
   (d) Commenter ces résultats : joueriez-vous à ce jeu ?