Université de Rennes 1 | Année 2016-2017
Master 1 Mathématiques | Chaînes de Markov et martingales

Contrôle continu # 1

le 24 octobre 2016 ; durée 1 heure ; aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, et soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(T) < \infty$. On note

$$X_n^T := X_{T\wedge n} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_n^T := \mathcal{F}_{T\wedge n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Donner une démonstration complète du fait que $(X_n^T)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport aux filtrations $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathcal{F}_n^T)_{n\geq 0}$.
2. On suppose, de plus, qu'il existe une constante $c > 0$ telle $\mathbb{E}(|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n) \leq c$.
   Montrer que la suite $(X_n^T)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable et déduire que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.
   On pourra noter $Z_n := |X_n - X_{n-1}|$ et étudier l'intégrabilité de la variable $W := \sum_{i\geq 1} Z_i \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}$.

Exercice 2 *Lois et lois conditionnelles*
Soient X, Y deux variables aléatoires telles que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y \geq \ell) = p^{\ell-1}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, et

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X>t\}} \mid Y) = e^{-Yt}, \quad \forall t \geq 0.$$

1. Comment choisir p pour que la loi de Y soit bien définie ? Trouver cette loi ainsi que la loi conditionnelle de X sachant Y.
2. Montrer que X est une variable aléatoire continue et trouver sa densité de probabilité.
3. Calculer $\mathbb{P}(Y = \ell \mid X > t)$ et $\mathbb{E}(Y \mid X > t)$. Trouver la loi conditionnelle de Y sachant X.

Exercice 3 *Martingale et (encore une) suite récurrente*
Soient deux réels $p, \alpha \in]0, 1[$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$X_0 = p \quad \text{et} \quad X_{n+1} = \alpha X_n + (1-\alpha)\mathbb{1}_{\{0\leq U_{n+1}\leq X_n\}}, \quad \forall n \geq 0.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < X_n < 1$.
2. Soit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$ pour $n \geq 1$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞ et que $X_\infty \in [0, 1]$ p.s. La convergence a lieu également dans L^1 ? dans L^2 ?
4. Trouver les limites, quand $n \to \infty$, des suites
   $$\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n\geq 0}, \quad \big(\mathbb{E}(X_n^2)\big)_{n\geq 0}, \quad \big(\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2]\big)_{n\geq 0}.$$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbb{E}\big[(X_{n+1} - X_n)^2\big] = (1-\alpha)^2 \mathbb{E}\big[X_n(1 - X_n)\big].$$
6. En déduire que $\mathbb{E}\big[X_\infty(1 - X_\infty)\big] = 0$ et ensuite montrer que $X_\infty \sim \mathcal{B}(1, p)$ (loi de Bernoulli).