0.1 La construction d'une probabilité sur $(0,1]$*

i) Soit

$$\Omega = (0,1],\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_{(0,1]} \text{ et } \mathcal{S} = \{(a,b] : 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\}.$$

Il est clair que $\emptyset,\ \Omega \in \mathcal{S}$.
Si $I_1, I_2 \in \mathcal{S}$, alors $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{S}$. Donc $\mathcal{S}$ est stable par intersection finie.
Enfin, si $I \in \mathcal{S}$, alors I^c est une union disjointe de deux intervalles de $\mathcal{S}$ (faire un dessin).
De plus on sait que $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$ la tribu borélienne sur Ω.

ii) On définit sur $\mathcal{S}$ la fonction $\lambda : \mathcal{S} \to [0,1]$, par :

$$\lambda(\emptyset) = 0 \text{ et } \lambda((a,b]) = b - a.$$

On a $\lambda(\Omega) = \lambda((0,1]) = 1$.
Montrons que λ est une fonction additive sur $\mathcal{S}$. Soit $(a,b] \in \mathcal{S}$ et supposons que :

$$(a,b] = \bigcup_{i=1}^{r} (a_i, b_i],$$

où les intervalles dans le membre droit sont disjoints. Supposons aussi que ces intervalles ont été numérotées convenablement :

$$a_1 = a,\ b_r = b,\ b_i = a_{i+1},\ i = 1, \ldots, r-1.$$

Alors $\lambda((a,b]) = b - a$ et

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda((a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{r} (b_i - a_i) = b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_r - a_r = b_r - a_1 = b - a.$$

iii) Montrons maintenant que λ est σ-additive. Soit $(a,b] \in \mathcal{S}$ et supposons que :

$$(a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i],$$

où les intervalles dans le membre droit sont à nouveau disjoints.

iii)-a) Montrons d'abord que

$$\lambda((a,b]) = b - a \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda((a_i, b_i])\,. \tag{1}$$

On choisit $\varepsilon < b - a$ et on observe que

$$[a+\varepsilon, b] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a_i, b_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\,.$$

Le membre droit est un recouvrement ouvert du compact $[a+\varepsilon, b]$, donc on peut en extraire un recouvrement fini : il existe un entier N tel que

$$[a+\varepsilon, b] \subset \bigcup_{i=1}^{N} \left(a_i, b_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\,. \tag{2}$$

Pour terminer la preuve de (1) il suffit de prouver que

$$b-a-\varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i+\frac{\varepsilon}{2^i})\,. \tag{3}$$

En effet on aurait alors

$$b-a-\varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)+\varepsilon$$

d'où

$$b-a \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)+2\varepsilon$$

et comme ε est choisit arbitraire on obtient (1). Il reste à prouver que (2) implique (3).

iii)-b) Avec un petit changement de notations, on va montrer que

$$[c,d] \subset \bigcup_{i=1}^{N}(c_i,d_i)\,. \tag{4}$$

implique

$$d-c \leqslant \sum_{i=1}^{N}(d_i-c_i)\,. \tag{5}$$

On fait une récurrence : c'est clair pour $N=1$. Supposons que (4) pour $N-1$ implique (5) pour $N-1$ et on vérifie l'implication pour N. Supposons que

$$c_N = \max_{i=1,\dots,N} c_i \text{ et } c_N < d \leqslant d_N.$$

On considère deux cas (faire un dessin) :

1. Supposons $c_N \leqslant c$. Alors $d-c \leqslant d_N-c_N \leqslant \sum_{i=1}^{N}(d_i-c_i)$.
2. Supposons $c < c_N$. Alors par (4) on a

$$[c,c_N] \subset \bigcup_{i=1}^{N-1}(c_i,d_i),$$

et par l'hypothèse de récurrence

$$c_N-c \leqslant \sum_{i=1}^{N-1}(d_i-c_i),$$

donc

$$d-c = d-c_N+c_N-c \leqslant d-c_N+\sum_{i=1}^{N-1}(d_i-c_i) \leqslant d_N-c_N+\sum_{i=1}^{N-1}(d_i-c_i) = \sum_{i=1}^{N}(d_i-c_i).$$

Cela achève la preuve de (1).

iii)-c) Pour terminer la preuve de la σ-additivité on va vérifier l'inégalité inverse. On reprend $(a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i]$ avec une union d'intervalles disjoints. Comme pour tout n, $\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]$ est une union d'intervalles disjoints la même chose est vrai pour

$$(a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i] =: \bigcup_{j=1}^{m} I_j.$$

Comme λ est additive on peut écrire

$$\lambda((a,b]) = \lambda(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i] \cup \bigcup_{j=1}^{m} I_j) = \sum_{i=1}^{n}\lambda((a_i,b_i]) + \sum_{j=1}^{m}\lambda(I_j) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda((a_i,b_i])$$

Lorsque $n \to \infty$ on trouve

$$\lambda((a,b]) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\lambda((a_i,b_i])$$

donc λ est σ-additive sur $\mathcal{S}$.

iv) Une définition et le resultat clé en cadre général :

Définition 0.1 *(semi-algèbre)*
Soit Ω un ensemble non-vide quelconque. Une famille de sous-ensembles $\mathcal{S}$ de Ω est une **semi-algèbre** *si*

— $\emptyset, \Omega \in \mathcal{S}$;
— *$\mathcal{S}$ est stable par intersections finies ;*
— *si $A \in \mathcal{S}$, alors il existe un n fini et des ensembles $C_1, \ldots, C_n$ disjoints dans $\mathcal{S}$ tels que $A^c = C_1 \cup \ldots \cup C_n$.*

Théorème 0.1 *(d'extension)*
Supposons que $\mathcal{S}$ est une semi-algèbre sur un ensemble non-vide quelconque Ω et que P est une fonction σ-additive d'ensembles définie sur $\mathcal{S}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. Alors il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\sigma(\mathcal{S})$ qui prolonge P (c'est-à-dire que $\mathbb{P}_{|\mathcal{S}} = \mathrm{P}$).

Ce résultat s'applique pour $\Omega = (0,1]$ avec $\mathcal{S}$ définie en *i)* et λ définie en *ii)*. La probabilité ainsi obtenue est la **mesure de Lebesgue sur** $(0,1]$.
v) Donnons les idées de preuve du résultat clé. On considère Ω un ensemble non-vide quelconque. Le Théorème 0.1 est une conséquence des trois lemmes suivants. Avant de les énoncer on a besoin d'une définition (rappel) :

Définition 0.2 *(algèbre et algèbre engéndrée)*
1. Une famille de sous-ensembles $\mathcal{A}$ de Ω est une **algèbre** *si*

— $\Omega \in \mathcal{A}$;
— *$A \in \mathcal{A}$ implique $A^c \in \mathcal{A}$;*
— *$A, B \in \mathcal{A}$ implique $A \cup B \in \mathcal{A}$.*

2. **L'algèbre engendrée** *par une famille de sous-ensembles* $\mathcal{S}$ *de* Ω *est la plus petite algèbre contenant* $\mathcal{S}$ *(on note* $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ *).*

Lemme 0.1 *(algèbre engéndrée par une semi-algèbre)*
Supposons que $\mathcal{S}$ *est une semi-algèbre sur* Ω*. Alors, l'algèbre engendrée par* $\mathcal{S}$ *est la famille des unions finies d'éléments disjoints de* $\mathcal{S}$ *:*

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) := \{\bigcup_{i\in I} S_i : I \text{ fini},\ S_i \in \mathcal{S} \text{ disjoints } \}. \tag{6}$$

Lemme 0.2 *(première extension)*
Supposons que $\mathcal{S}$ *est une semi-algèbre sur* Ω *et que* P *est une fonction* σ*-additive définie sur* $\mathcal{S}$*, à valeurs dans* $[0,1]$*, telle que* $\mathrm{P}(\Omega) = 1$*. Alors il existe une unique extension* P' *de* P *sur* $\mathcal{A}(\mathcal{S})$*, telle que* P' *est* σ*-additive sur* $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ *et* $\mathrm{P}'(\Omega) = 1$*. Cette extension est définie par*

$$\mathrm{P}'(\bigcup_{i\in I} S_i) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}'(S_i). \tag{7}$$

Lemme 0.3 *(deuxième extension)*
Supposons que $\mathcal{A}$ *est une algèbre sur* Ω *et que* P' *est une fonction* σ*-additive définie sur* $\mathcal{A}$*, à valeurs dans* $[0,1]$*, telle que* $\mathrm{P}'(\Omega) = 1$*. Alors il existe une unique mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $\sigma(\mathcal{A})$ *(tribu engendrée par* $\mathcal{A}$*) qui prolonge* P'*.*

Preuve du Lemme 0.1. On note Λ l'ensemble du membre droit de (6). Il est clair que $\Lambda \supset \mathcal{S}$ et on montre que Λ est une algèbre. On vérifie les trois axiomes de la Définition 0.2.

1. Définition 0.1 implique $\Omega \in \mathcal{S}$, donc $\Omega \in \Lambda$.
2. Si $\bigcup_{i\in I} S_i$ et $\bigcup_{j\in J} S'_j$ sont deux éléments de Λ, alors

$$\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} S'_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} S_i \cap S'_j \in \Lambda$$

   puisque $\{S_i \cap S'_j : (i,j) \in I \times J\}$ est une famille finie disjointe d'éléments de $\mathcal{S}$ (qui est stable par intersection finie).
3. Enfin, vérifions la stabilité au passage au complémentaire. Soit $\bigcup_{i\in I} S_i \in \Lambda$ dont le complémentaire est $\bigcap_{i\in I} S_i^c$. D'après la troisième axiome d'une semi-algèbre, comme $S_i \in \mathcal{S}$, on a

$$S_i^c = \bigcup_{j\in J_i} S_{ij},$$

   avec une famille finie disjointe $\{S_{ij} : j \in J_i\}$ d'éléments de $\mathcal{S}$. Par le point précédent on conclut que $\bigcap_{i\in I} S_i^c \in \Lambda$.

Cela montre que Λ est une algèbre contenant $\mathcal{S}$, donc $\Lambda \supset \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Par ailleurs, $\bigcup_{i\in I} S_i \in \Lambda$ implique $\bigcup_{i\in I} S_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, d'où $\Lambda \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$. □

Preuve du Lemme 0.2. On commence par vérifier que P' est bien définie par (7), ensuite que P' est σ-additive sur $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ et enfin que l'extension est unique.

1. Supposons que $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ admet deux représentations différentes $A = \bigcup_{i\in I} S_i = \bigcup_{j\in J} S'_j$ et on a besoin de vérifier que $\sum_{i\in I} \mathrm{P}(S_i) = \sum_{j\in J} \mathrm{P}(S'_j)$ pour que P' ait une unique valeur en A. Comme $S_i \in \mathcal{A}$,
$$\sum_{i\in I} \mathrm{P}(S_i) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(S_i \cap A) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(S_i \cap \bigcup_{j\in J} S'_j) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(\bigcup_{j\in J} S_i \cap S'_j)$$
et comme $S_i = \bigcup_{j\in J} S_i \cap S'_j \in \mathcal{S}$ on peut utiliser l'additivité de P. Ainsi
$$\sum_{i\in I} \mathrm{P}(S_i) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \mathrm{P}(S_i \cap S'_j) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} \mathrm{P}(S_i \cap S'_j) = \sum_{j\in J} \mathrm{P}(S'_j).$$
La dernière égalité s'obtient en faisant le chemin inverse.
2. Supposons que pour $i \geqslant 1$ les ensembles disjoints sont $A_i = \bigcup_{j\in J_i} S_{ij} \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, $S_{ij} \in \mathcal{S}$ et $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Par ailleurs, comme $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, A admet la représentation $A = \bigcup_{k\in K} S_k$, $S_k \in \mathcal{S}$, $k \in K$ fini. Alors
$$\mathcal{S} \ni S_k = S_k \cap A = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_k \cap A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j\in J_i} S_k \cap S_{ij} \text{ avec } S_{ij} \in \mathcal{S}.$$
Par (7)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(A) = \sum_{k\in K} \mathrm{P}(S_k) &= \sum_{k\in K}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in J_i} \mathrm{P}(S_k \cap S_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in J_i}\sum_{k\in K} \mathrm{P}(S_k \cap S_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in J_i} \mathrm{P}(S_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(\bigcup_{j\in J_i} S_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}'(A_i),\end{aligned}$$
puisque $\sum_{k\in K} S_k \cap S_{ij} = A \cap S_{ij} = S_{ij} \in \mathcal{S}$.
3. Soient P'_1 et P'_2 deux extensions additives. Alors, pour tout $A = \bigcup_{i\in I} S_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ on a $\mathrm{P}'_1(A) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(S_i) = \mathrm{P}'_2(A)$.

On ainsi construit l'extension de P à une algèbre. □

Preuve du Lemme 0.3. On divise la preuve en trois parties : en 1ère partie on étend P' à une fonction d'ensemble Π σ-additive sur une famille $\mathcal{G} \supset \mathcal{A}$. En 2ème partie on étend Π à une fonction d'ensemble Π^* sur $\mathcal{P}(\Omega) \supset \sigma(\mathcal{A})$ et en 3ème partie on fait la restriction de Π^* à $\sigma(A)$ et on obtient la probabilité recherchée.

1. On définit d'abord la famille $\mathcal{G}$:
$$\mathcal{G} = \{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j : A_j \in \mathcal{A}\} = \{\lim_n \uparrow B_n : B_n \in \mathcal{A}, B_n \subset B_{n+1}, \forall n\}$$
et ensuite la fonction $\Pi : \mathcal{G} \to [0,1]$, par : si $G = \lim_n \uparrow B_n \in \mathcal{G}$, où $B_n \in \mathcal{A}$, alors
$$\Pi(G) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(B_n). \tag{8}$$
Cette dernière définition est bien justifiée car P' est σ-additive donc la propriété de continuité sur des suites croissantes est vraie. On dit que $\{B_n\}$ est une **suite approchante** de G. Il reste à voir que Π est bien définie, c'est-à-dire

Fait 1 *Si G admet deux suites approchantes $\{B_n\}$ et $\{B'_n\}$,*

$$G = \lim_n \uparrow B_n = \lim_n \uparrow B'_n \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(B'_n). \tag{9}$$

Listons quelques propriétés de Π et $\mathcal{G}$:

Fait 2 *On a*

$$\Omega, \emptyset \in \mathcal{G} \text{ et } \Pi(\omega) = 1,\, \Pi(\emptyset) = 0,$$

et pour $G \in \mathcal{G}$

$$0 \leqslant \Pi(G) \leqslant 1. \tag{10}$$

Enfin, on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ et $\Pi_{|\mathcal{A}} = \mathrm{P}'$.

Fait 3 *Si $G_i \in \mathcal{G}$ pour $i = 1, 2$,alors $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G}$, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ et Π est additive :*

$$\Pi(G_1 \cup G_2) + \Pi(G_1 \cap G_2) = \Pi(G_1) + \Pi(G_2). \tag{11}$$

Fait 4 Π *est monotone sur $\mathcal{G}$: si $G_i \in \mathcal{G}$ pour $i = 1, 2$ et $G_1 \subset G_2$, alors $\Pi(G_1) \leqslant \Pi(G_2)$.*

Fait 5 $\mathcal{G}$ *est stable par des limites des suites croissantes et Π est continue sur des suites croissantes : si $G_n \in \mathcal{G}$ et $G_n \uparrow G$, alors $G \in \mathcal{G}$ et $\Pi(G) = \lim_{n\to\infty} \Pi(G_n)$.*

Par les Faits 3 et 5 on déduit que Π est σ-additive sur $\mathcal{G}$ donc la 1ère partie est vérifiée.

2. On définit $\Pi^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) :\ \Pi^*(A) = \inf\{\Pi(G) : A \subset G \in \mathcal{G}\}. \tag{12}$$

$\Pi^*(A)$ est le plus petit majorant des valeurs $\Pi(G)$ sur des ensembles $G \in \mathcal{G}$ contenant A. C'est **la mesure extérieure de** A. Comme pour Π, on va lister les propriétés de Π^* :

Fait 6 *On a*

$$\Pi^*_{|\mathcal{G}} = \Pi \tag{13}$$

et $0 \leqslant \Pi^*(A) \leqslant 1$, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. En particulier, $\Pi^*(\Omega) = \Pi(\Omega) = 1$ et $\Pi^*(\emptyset) = \Pi(\emptyset) = 0$.

Fait 7 Π^* *est sous-additive : on a pour $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$*

$$\Pi^*(A_1 \cup A_2) + \Pi^*(A_1 \cap A_2) \leqslant \Pi^*(A_1) + \Pi^*(A_2). \tag{14}$$

En particulier

$$1 = \Pi^*(\Omega) \leqslant \Pi^*(A) + \Pi^*(A^c). \tag{15}$$

Fait 8 Π^* *est monotone sur $\mathcal{P}(\Omega)$.*

Fait 9 Π^* *est continue sur des suites croissantes : si $A_n \uparrow A$, alors $\Pi^*(A_n) \uparrow \Pi^*(A)$.*

3. On introduit une sous-famille $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$:

$$\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{P}(\Omega) : \Pi^*(D) + \Pi^*(D^c) = 1\}. \tag{16}$$

Fait 10 $\mathcal{D}$ *est une tribu et $\Pi^*_{|\mathcal{D}}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{D})$.*

Fait 11 *$\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$, donc $\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{A})$, et alors $\Pi^*_{|\sigma(\mathcal{A})}$ est la probabilité (unique par un argument de classe monotone) désirée.*

Preuve du Fait 1 : Il suffit de montrer que :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n \text{ implique } \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(B_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(B'_n). \tag{17}$$

Pour m fixé $\lim_n \uparrow (B_m \cap B'_n) = B_m$ et on a aussi $B_m \cap B'_n \subset B'_n$. On sait que la σ-additivité de P implique la continuité sur des suites croissantes. On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(B'_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(B_m \cap B'_n) = \mathrm{P}'(B_m).$$

Comme cette inégalité a lieu pour tout m, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(B'_n) \geqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}'(B_m).$$

□

Preuve du Fait 2 : Si on pose $B_n = \Omega$ pour tout n, alors

$$\mathcal{A} \ni B_n = \Omega \uparrow \Omega \text{ et } \Pi(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}'(\Omega) = 1.$$

Le même argument marche pour $\emptyset$. (10) s'obtient par le fait que $0 \leqslant \mathrm{P}'(B_n) \leqslant 1$, pour toute suite approchante $\{B_n\}$ de $\mathcal{A}$. Enfin, pour montrer que $\Pi(A) = \mathrm{P}'(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, on prend la suite approchante identiquement égale à A. □

Preuve du Fait 3 : Soient les suites approchantes $B_{n1}, B_{n2} \in \mathcal{A}$, telles que $B_{ni} \uparrow G_i$ pour $i = 1, 2$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, on voit que

$$\mathcal{A} \ni B_{n1} \cup B_{n2} \uparrow G_1 \cup G_2, \mathcal{A} \ni B_{n1} \cap B_{n2} \uparrow G_1 \cap G_2,$$

qui montrent que $G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$. De plus

$$\mathrm{P}'(B_{n1} \cup B_{n2}) + \mathrm{P}'(B_{n1} \cap B_{n2}) = \mathrm{P}'(B_{n1}) + \mathrm{P}'(B_{n2}),$$

et pour $n \to \infty$ on trouve (11). □

Preuve du Fait 4 : C'est une conséquence directe de (17). □

Preuve du Fait 5 : Pour chaque n, G_n admet une suite approchante $B_{m,n} \in \mathcal{A}$ telle que $\lim_m \uparrow B_{m,n} = G_n$. On définit $D_m = \cup_{n=1}^m B_{m,n} \in \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est stable par union finie). On va montrer que

$$\lim_m \uparrow D_m = G \tag{18}$$

et alors G admet une suite approchante croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, donc $G \in \mathcal{G}$.
Montrons d'abord que $\{D_m\}$ est croissante :

$$D_m = \bigcup_{n=1}^{m} B_{m,n} \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_{m+1,n} \subset \bigcup_{n=1}^{m+1} B_{m+1,n} = D_{m+1}$$

Calculons la limite de $\{D_m\}$. Si $n \geqslant m$, on a par la définition de D_m :

$$B_{m,n} \subset D_m = \bigcup_{j=1}^{m} B_{m,j} \subset \bigcup_{j=1}^{m} G_j = G_m.$$

donc $B_{m,n} \subset D_m \subset G_m$. On prend la limite en m :

$$G_n = \lim_m \uparrow B_{m,n} \subset \lim_m \uparrow D_m \subset \lim_m \uparrow G_m = G$$

et ensuite la limite en n :

$$G = \lim_n \uparrow G_n \subset \lim_m \uparrow D_m \subset \lim_m \uparrow G_m = G.$$

Donc $G \in \mathcal{G}$ et par la définition de Π, on sait que $\Pi(G) = \lim_{m\to\infty} \Pi(D_m)$. Il reste à prouver que $\Pi(G_n) \uparrow \Pi(G)$. Par les trois inclusions précédentes :

$$\Pi(B_{m,n}) \leqslant \Pi(D_m) \leqslant \Pi(G_m).$$

On fait $m \to \infty$ et comme $G_n = \lim_m \uparrow B_{m,n}$,

$$\Pi(G_n) \leqslant \lim_{m\to\infty} \Pi(D_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \Pi(G_m), \forall n.$$

On fait $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pi(G_n) \leqslant \lim_{m\to\infty} \Pi(D_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \Pi(G_m)$$

donc $\lim_{n\to\infty} \Pi(G_n) = \lim_{m\to\infty} \Pi(D_m) = \Pi(G)$. $\square$

Preuve du Fait 6 : Il est clair que si $A \in \mathcal{G}$, alors $A \in \{G : A \subset G \in \mathcal{G}\}$ et donc l'infimum est atteint en A. $\square$

Preuve du Fait 7 : Pour vérifier (14), on fixe $\varepsilon > 0$ et on trouve $G_i \in \mathcal{G}$ tels que $G_i \supset A_i$ et pour $i = 1, 2$,

$$\Pi^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \Pi(G_i).$$

On somme ces deux inégalités et on trouve

$$\Pi^*(A_1) + \Pi^*(A_2) + \varepsilon \geqslant \Pi(G_1) + \Pi(G_2) = \Pi(G_1 \cup G_2) + \Pi(G_1 \cap G_2).$$

par le Fait 3 pour Π. Comme $G_1 \cup G_2 \supset A_1 \cup A_2$ et $G_1 \cap G_2 \supset A_1 \cap A_2$, par la définition de Π^* qu'on peut encore minorer par

$$\Pi^*(A_1 \cup A_2) + \Pi^*(A_1 \cap A_2).$$

$\square$

Preuve du Fait 8 : Cette propriété est une conséquence du fait que Π est monotone sur $\mathcal{G}$ (Fait 4). $\square$

Preuve du Fait 9 : On fixe $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \geqslant 1$ on trouve $G_n \in \mathcal{G}$ tels que $G_n \supset A_n$ et

$$\Pi^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geqslant \Pi(G_n).$$

On pose $G'_n = \cup_{m=1}^n G_m$. Comme $\mathcal{G}$ est stable par réunion finie, $G'_n \in \mathcal{G}$ et $\{G'_n\}$ est croissante. On montre par récurrence

$$\Pi^*(A_n) + \varepsilon \sum_{m=1}^{n} 2^{-m} \geqslant \Pi(G'_n). \tag{19}$$

Pour $n = 1$ c'est le choix de G_n. On montre que "$n \Rightarrow n+1$". On a

$$A_n \subset G_n \subset G'_n \text{ et } A_{n+1} \subset G_{n+1} \subset G'_{n+1}$$

et donc $A_n \subset G'_n$ et $A_{n+1} \subset G'_{n+1}$, donc $A_n \subset G'_n \cap G_{n+1} \in \mathcal{G}$. Ainsi

$$\Pi(G'_{n+1}) = \Pi(G'_n \cup G_{n+1}) = \Pi(G'_n) + \Pi(G_{n+1}) - \Pi(G'_n \cap G_{n+1})$$

par (11). On peut alors majorer le membre de droite de l'égalité précédente par

$$\leqslant \left(\Pi^*(A_n) + \varepsilon \sum_{m=1}^{n} 2^{-m}\right) + \Pi^*(A_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \Pi^*(A_n) = \varepsilon \sum_{m=1}^{n+1} 2^{-m} + \Pi^*(A_{n+1})$$

qui est (19) pour $n+1$. On fait $n \to \infty$ dans (19). D'après la monotonie de Π sur $\mathcal{G}$ et celle de Π^* sur $\mathcal{P}(\Omega)$, et comme $\mathcal{G}$ est stable par des unions croissantes, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^*(A_n) + \varepsilon \geqslant \lim_{n\to\infty} \Pi(G'_n) = \Pi(\bigcup_{j=1}^{\infty} G'_j).$$

Comme $A = \lim_n \uparrow A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} G'_j \in \mathcal{G}$, on déduit que $\lim_{n\to\infty} \Pi^*(A_n) \geqslant \Pi^*(A)$. Par ailleurs, la monotonie donne $\Pi^*(A_n) \leqslant \Pi^*(A)$, d'où $\lim_{n\to\infty} \Pi^*(A_n) \leqslant \Pi^*(A)$. □

Preuve du Fait 10 : D'abord on prouve que $\mathcal{D}$ est une algèbre. Il est clair que $\Omega \in \mathcal{D}$, puisque $\Pi^*(\Omega) = 1$ et $\Pi^*(\emptyset) = 0$. Le passage au complémentaire est évident donc il reste à vérifier la stabilité aux unions et intersections finies. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$, alors par (14) on trouve :

$$\Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*(D_1 \cap D_2) \leqslant \Pi^*(D_1) + \Pi^*(D_2) \tag{20}$$

$$\Pi^*((D_1 \cup D_2)^c) + \Pi^*((D_1 \cap D_2)^c) \leqslant \Pi^*(D_1^c) + \Pi^*(D_2^c). \tag{21}$$

On additionne (20) et (21) pour obtenir

$$\Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*((D_1 \cup D_2)^c) + \Pi^*(D_1 \cap D_2) + \Pi^*((D_1 \cap D_2)^c) \leqslant 2 \tag{22}$$

où le membre de droite est obtenu parce que $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. Par (15) le membre de gauche est $\geqslant 2$ donc en (22) on a égalité. En combinant cette égalité avec (15) on trouve

$$\Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*((D_1 \cup D_2)^c) = 1$$

$$\Pi^*(D_1 \cap D_2) + \Pi^*((D_1 \cap D_2)^c) = 1,$$

donc $D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ est une algèbre. De plus on obtient des égalités en (20) et (21) (sinon on contredit (22)), donc Π^* est additive sur $\mathcal{D}$.

Pour montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu il suffit de vérifier que $\mathcal{D}$ est une classe monotone (et utiliser ensuite le théorème de classe monotone). Comme $\mathcal{D}$ est stable par passage au complémentaire il suffit de montrer que $D_n \in \mathcal{D}$, $D_n \uparrow D$, implique $D \in \mathcal{D}$. Par le Fait 9

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^*(D_n) = \Pi^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \Pi^*(D).$$

Par ailleurs, pour tout $m \geqslant 1$,

$$\Pi^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)^c) = \Pi^*(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^c) \leqslant \Pi^*(D_m^c),$$

d'où, par (15),

$$1 \leqslant \Pi^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) + \Pi^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)^c) \leqslant \lim_{n\to\infty} \Pi^*(D_n) + \Pi^*(D_m^c). \tag{23}$$

Si on fait $m \to \infty$, comme $D_n \in \mathcal{D}$,

$$1 \leqslant\leqslant \lim_{n\to\infty} \Pi^*(D_n) + \lim_{m\to\infty} \Pi^*(D_m^c) = \lim_{n\to\infty} (\Pi^*(D_n) + \Pi^*(D_n^c)) = 1,$$

donc (23) est une égalité et donc $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$. Ainsi $\mathcal{D}$ est une algèbre et une classe monotone, donc une tribu.

Montrons que $\Pi^*_{|\mathcal{D}}$ est σ-additive. Soit D_n une suite disjointe dans $\mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est une algèbre et par le Fait 9 et l'additivité de Π^* on a

$$\Pi^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \Pi^*(\lim_n \bigcup_{i=1}^{n} D_i) = \lim_{n\to\infty} \Pi^*(\bigcup_{i=1}^{n} D_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Pi^*(D_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi^*(D_i).$$

□

Preuve du Fait 11. Tout élément $A \in \mathcal{A}$ est élément de $\mathcal{G}$ (suite approchante constante) et alors $\Pi^*(A) = \Pi(A) = \mathrm{P}'(A)$ et la même chose pour A^c. Mais alors, par (15) $1 \leqslant \Pi^*(A) + \Pi^*(A^c) = \mathrm{P}'(A) + \mathrm{P}'(A^c) = 1$, d'où $A \in \mathcal{D}$. Ainsi, $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$, donc la tribu $\mathcal{D}$ contient $\sigma(\mathcal{A})$. La restriction $\Pi^*_{|\sigma\mathcal{A}}$ est la probabilité désirée. L'unicité de cette extension de $\mathcal{A}$ à $\sigma(\mathcal{A})$ s'obtient par un argument de classe monotone. □