Analyse pour processus stochastiques : devoir en classe

vendredi 14 mars 2014 - durée 3 heures - documents de cours autorisés

Exercice I.

Soient $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ des probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ peut converger étroitement vers Q sans qu'il y ait convergence de la suite des moments $\left\{\mu_k^{(n)} = \int_{\mathbb{R}} x^k Q_n(dx)\right\}_{n\geqslant 1}$ ($k \geqslant 1$ entier).
   On pourra prendre $Q_n = (1 - n^{-1/2})\delta_0 + n^{-1/2}\delta_n$.
2. Montrer que si $\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |x| Q_n(dx) < \infty$ alors la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ est tendue.
   On pourra montrer à l'aide de l'inégalité de Markov que $\inf_{r>0} \left[\sup_{n\geqslant 1} Q_n(|x| > r)\right] = 0$.
3. On suppose que la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ converge étroitement vers Q. On veut montrer que pour toute fonction borélienne f, bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$, continue Q-presque partout et dont le comportement à l'infini est en $o(g)$, avec $g \geqslant 0$ borélienne t.q. $\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) Q_n(dx) < \infty$, on a $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) Q_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) Q(dx)$.
   (a) Soient, pour $r > 0$, $\eta_r := \sup_{|x|>r} \dfrac{|f(x)|}{g(x)}$ et $A_r := \sup_{|x|\leqslant r} |f(x)|$. Montrer que
   $$\forall r > 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|>r\}} |f(x)| Q_n(dx) \leqslant \eta_r \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) Q_n(dx).$$
   Vérifier qu'il existe un $R > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant A_R + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En déduire que $f \in \mathrm{L}^1(Q_n)$ et qu'elle vérifie $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| Q_n(dx) \leqslant A_R + \int_{\mathbb{R}} g(x) Q_n(dx)$, $\forall n \geqslant 1$.
   (b) Montrer que $\forall \ell \geqslant 0, \forall n \geqslant 1$, $\int_{\mathbb{R}} (|f(x)| \wedge \ell) Q_n(dx) \leqslant A_R + \int_{\mathbb{R}} g(x) Q_n(dx)$. En déduire que f vérifie $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| Q(dx) \leqslant A_R + \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) Q_n(dx) < \infty$ et donc $f \in \mathrm{L}^1(Q)$.
   (c) Utiliser les points précédents pour montrer que
   $$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|>r\}} |f(x)| Q_n(dx) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty} \int_{\{|x|>r\}} |f(x)| Q(dx) = 0.$$
   (d) Montrer qu'il existe un ensemble dense $\mathcal{R} \subset (0, \infty)$ tel que pour tout $r \in \mathcal{R}$ on ait
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|\leqslant r\}} |f(x)| Q_n(dx) = \int_{\{|x|\leqslant r\}} |f(x)| Q(dx).$$
   On pourra étudier l'ensemble de points de discontinuité de la fonction $f_r(x) = f(x) \mathbb{1}_{\{|x|\leqslant r\}}$.
   (e) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) Q_n(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x) Q(dx) \right| \leqslant 0$ et conclure.
4. On continue de supposer que la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ converge étroitement vers Q. Montrer que, s'il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que $\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^{2\ell} Q_n(dx) < \infty$, alors Q admet des moments de tout ordre $k < 2\ell$ et on a $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^k Q_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^k Q(dx)$, $\forall k < 2\ell$. On pourra utiliser le point précédent pour deux fonctions f et g bien choisies.

Tournez la page S.V.P.

5. Supposons cette fois-ci qu'il y a convergence de toutes les suites de moments pour les probabilités Q_n, autrement dit, $\forall k \geqslant 1$ entier, $\exists \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^k Q_n(dx) = \mu_k \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ est tendue et qu'il existe une probabilité Q sur $\mathbb{R}$ telle que les μ_k ($k \geqslant 1$ entier) sont ses moments. Si Q est entièrement déterminée par ses moments déduire que $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ converge étroitement vers Q.
6. Que peut-on dire de la suite de probabilités $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ satisfaisant la condition que $\forall k \geqslant 1$ entier $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^k Q_n(dx) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \frac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } k = 2p \text{ pair} \end{cases}$?

Exercice II.

Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement réel standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ et on note $\mathcal{W}$ sa loi.

1. Rappeler l'expression de la fonctionnelle de taux I pour le principe de grandes déviations satisfait par la famille des lois de $\{\sqrt{\varepsilon} B_\bullet\}_{\varepsilon>0}$. Notons $I(A) := \inf_{f\in A} I(f)$ avec A un borélien de $E = \mathrm{C}([0,1]; \mathbb{R})$. On fixe $g \in E$ une fonction strictement positive et on note

$$G := \{f \in E : \exists t \in [0,1] \text{ t.q. } f(t) \geqslant g(t)\}.$$

Évidemment G ne contient pas la fonction nulle. On veut étudier $\mathrm{P}(B_\bullet \in \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} G)$.

   (a) Vérifier que G est un fermé et c'est un ensemble de continuité pour I (c'est-à-dire $I(\mathring{G}) = I(G)$.) On pourra vérifier que pour tout $\eta > 0$, $(1+\eta)f \in \mathring{G}$, dès que $f \in G$, et déduire que $I(G) \leqslant I(\mathring{G}) \leqslant (1+\eta)^2 I(G)$.

   (b) Pour tout $u \in (0,1]$ on introduit la fonction $g_u(t) := \frac{g(u)}{u}(t \wedge u)$. Montrer que $g_u \in G$ et que $I(f) \geqslant I(g_{\tau_f})$ pour toute $f \in G$, où $\tau_f := \inf\{t \in [0,1] : f(t) = g(t)\}$. Que vaut $I(G)$?

   (c) Déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathrm{P}\big(\exists t \in [0,1] \text{ tel que } \sqrt{\varepsilon} B_t \geqslant g(t)\big) = -\inf_{u\in(0,1]} \Big[g(u)^2/(2u)\Big]$.
   Supposons qu'il existe un unique u_0 réalisant l'infimum dans la relation pécédente. Pourquoi g_{u_0} est la trajectoire la plus probable au franchissement de la "barrière" g ?

   (d) Étudier le cas de la fonction $g(t) = 1 + t$.

2. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et considérons $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus continu adapté tel que

$$X_t = B_t - \sigma \int_0^t X_s ds, \quad t \in [0,1].$$

   (a) Justifier succinctement l'existence d'un unique processus X. On note $Q = P \circ X_\bullet^{-1}$ sa loi. Montrer qu'il s'agit d'une loi gaussienne et calculer sa covariance.

   (b) Pour $\varepsilon > 0$ la loi de $X_\bullet^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} X_\bullet$ sera notée Q_ε. Justifier soigneusement que la famille $\{Q_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations et donner la fonctionnelle de taux J.

   (c) On note $Z = \sqrt{\int_0^1 X_s^2 ds}$ et ν_ε la loi de la variable aléatoire $\sqrt{\varepsilon} Z$. Montrer que la famille $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations sur $\mathbb{R}$ et de fonction de taux K.

   (d) Montrer que $K(y) = \begin{cases} y^2 K(1) & \text{si } y \geqslant 0 \\ +\infty & \text{si } y < 0 \end{cases}$ et déduire que $K \in \mathrm{C}^\infty\big((0,\infty); [0,\infty]\big)$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice III.

Soient deux fonctions $b, \sigma \in \mathrm{C}_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (dérivables avec dérivées continues et bornées sur $\mathbb{R}$). On note $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ et on considère l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,\ t \in (0,1], \quad \text{avec } X_0 = x.$$

Justifier succinctement l'existence et l'unicité de la solution X de cette équation.

1. On suppose d'abord que $b(x) = \mu x$ et $\sigma(x) = \sigma x$, où μ et σ sont deux constantes non-nulles.
   (a) Donner le développement en chaos de Wiener de la variable aléatoire X_t. On pourra commencer par expliciter X_t et justifier l'égalité $\exp\big(B_t - t/2\big) = \sum_{n\geqslant 0} I_n\big(\mathbb{1}_{[0,t]}^{\otimes n}\big)$. En déduire les valeurs de $\mathrm{E}(X_t)$ et $\mathrm{E}(X_t^2)$.
   (b) Montrer que $D_s X_t = \sigma X_t$ si $s \leqslant t$ et que $D_s X_t = 0$ si $s > t$.
2. On suppose ici que $\sigma(x) \equiv \sigma \neq 0$. Ainsi $X_t = x + \int_0^t b(X_u)du + \int_0^1 \sigma \mathbb{1}_{[0,t]}(u) dB_u$, $t \in [0,1]$.
   (a) Justifier pourquoi $D_s X_t = 0$ si $s > t$.
   Montrer que si $s \leqslant t$, $D_s X_t = \int_s^t b'(X_u) D_s X_u \, du + \sigma \mathbb{1}_{[0,t]}(s)$.
   (b) Pour $t \geqslant s$, on pose $\rho_s(t) := D_s X_t$. Que vaut $\rho_s(s)$? Montrer que $\rho_s(t)$ vérifie une équation différentielle ordinaire linéaire. Déduire l'expression de $D_s X_t$.
3. On continue de supposer que $\sigma(x) \equiv \sigma \neq 0$ et soit $b(x) = \mu x$, $\mu \neq 0$. Qui est le processus X ?
   (a) Montrer que $X_t = e^{\mu t}\big(x + \sigma \displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t]}(u) e^{-\mu u} dB_u\big)$. Calculer $D_s X_t$.
   (b) Utiliser le résultat du point 2(b) précédent pour retrouver $D_s X_t$.