Université de Rennes 1 — Année 2017-2018

Master 2ème Mathématiques — Modèles continus ou à sauts

Devoir maison # 5 : Problème de martingale

Exercice 1 1. Soit (M_t) une $(\mathcal{F}_t)$-martingale càdlàg et soit $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe de classe C^1. Montrer que pour $s < t$

$$\mathbb{E}(M_t\, f(t) - M_s\, f(s)|\mathcal{F}_s) = (f(t) - f(s))M_s = \mathbb{E}\Big(\int_s^t M_u\, f'(u)du|\mathcal{F}_s\Big) \tag{1}$$

et que $M_t\, f(t) - \displaystyle\int_0^t M_u\, f'(u)du$ est aussi une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Pour obtenir la deuxième égalité de (1) on pourra introduire une division $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = t$ de l'intervalle $[s,t]$ avec $u_j = j(t-s)/n$, $j = 0, 1, \ldots, n$ et utiliser le même argument que dans la preuve de la première égalité de (1).

2. Soit (X_t) la solution d'un L-problème de martingale et soit $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe bornée de classe C^1. Montrer que, pour toute $f \in D_L$,

$$f(X_t)\phi(t) - \int_0^t \big[\phi'(s)\, f(X_s) + \phi(s)\, Lf(X_s)\big]\, ds \quad \text{est une martingale.}$$

En particulier si $\phi(s) = e^{-\lambda s}$, $\lambda > 0$, alors $f(X_t)e^{-\lambda t} - \displaystyle\int_0^t e^{-\lambda s}(\lambda I - L)f(X_s)ds$ est une martingale. On pourra utiliser le point précédent.

3. Si (X_t) la solution d'un (L, δ_x)-problème de martingale pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ alors l'opérateur L est dissipatif, c'est-à-dire $\|(\lambda I - L)f\| \geq \lambda\|f\|$ pour $\lambda > 0$ et $f \in D_L$. On pourra utiliser la dernière martingale du point précédent.