Devoir maison # 4 : Semigroupes et génerateurs

Exercice 1 Soit (Y_t) un processus de Poisson composé : $Y_t = 0$ si $N_t = 0$ et $Y_t = \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$, où (N_t) est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et (Z_n) iid de loi μ sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que son symbole est

$$\eta(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle u,y\rangle} - 1\right)\lambda\mu(dy)$$

et que son semi-groupe est donné par

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) q_t(dy), \quad \text{où } q_t \text{ est la densité de } Y_t.$$

Soit $f_u(x) = e^{i\langle u,x\rangle}$. Montrer que

$$T_t f_u(x) = e^{i\langle u,x\rangle} e^{t\eta(u)} \quad \text{et} \quad L f_u(x) = e^{i\langle u,x\rangle}\eta(u). \tag{1}$$

Ces formules de (1) restent-elles vraies pour $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u,x\rangle} g(u) du$ avec $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$? En déduire que les formules de (1) sont vraies sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et donner l'expression du générateur de Y sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice (Bonus) Soit A un opérateur linéaire sur $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ ayant le domaine D_A. On dit que

- — A est conditionnellement positif si $Af(x) \geq 0$ pour toute $f \in D_A$ t.q. $f(x) = 0 = \min_y f(y)$;
- — A satisfait le principe du maximum positif (pmp) si $Af(x) \leq 0$ pour toute $f \in D_A$ t.q. $f(x) = \max_y f(y) \geq 0$;
- — A est dissipatif si $\|(\lambda I - A)f\| \geq \lambda \|f\|$ pour $\lambda > 0$ et $f \in D_A$.

Montrer que si L est le générateur infinitésimal d'un processus de Feller avec domaine D_L alors il est conditionnellement positif, il satisfait le pmp et est dissipatif.

Théorème de Courrège : si L est le générateur d'un processus de Feller sur $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ ayant le domaine D_L tel que $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ et si L satisfait pmp alors L est de "type Lévy", c'est-à-dire, pour $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$Lf(x) = c(x)f(x) + \langle b(x), \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2}\langle G(x)\nabla, \nabla\rangle f(x)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \left[f(x+y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y\rangle \mathbb{1}_{B_1}(y)\right]\nu(x,dy),$$

où $G(x)$ est une matrice symétrique positive définie et $\nu(x,\cdot)$ est une mesure de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ dépendant d'une façon mesurable de x, et $c(x) < 0$.