Devoir maison # 3 : Convergence des mesures de probabilités

Exercice 1 On considère E un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $(E, \mathcal{B}(E))$. Soit $\mathcal{L}$ la famille des fonctions continues sur $f : E \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{x \in E} |f(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| \leq \mathrm{d}(x, y), \forall x, y \in E,$$

où d est la métrique sur E. Définissons

$$d_{\mathcal{L}}(Q, Q') = \sup_{f \in \mathcal{L}} \left| \int_E f \, dQ - \int_E f \, dQ' \right|.$$

1. Montrer que $d_{\mathcal{L}}$ est une métrique sur l'ensemble des mesures de probabilités $\mathcal{M}_1(E)$.
2. Montrer qu'une suite de probabilités Q_n converge étroitement vers une probabilité Q si et seulement si $d_{\mathcal{L}}(Q_n, Q) \to 0$ quand $n \to \infty$.
