Université de Rennes 1 — Année 2017-2018
Master 2ème Mathématiques — Modèles continus ou à sauts

Devoir maison # 2 : Processus de Lévy et formule de Lévy-Itô

Exercice 1 Soit $(Y(t))_{t\geq 0}$ un processus de Lévy réel avec sauts majorés par 1 ayant sa décomposition de Lévy-Itô

$$Y(t) = bt + B_A(t) + \int_{|x|<1} x\widetilde{N}(t,dx), \quad t \geq 0.$$

On suppose que Y peut avoir de sauts de taille arbitrairement petite (c'est-à dire qu'il n'existe pas de $a \in (0,1)$ tel que $\nu\big((-a,a)\big) = 0$ où ν est la mesure de Lévy de Y). Cette On introduit une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ donnée par

$$\varepsilon_n = \sup\Big\{y \geq 0 : \int_{0<|x|<y} x^2\nu(dx) \leq \frac{1}{8^n}\Big\}$$

et on lui associe la suite de processus de Lévy

$$Y_n(t) = bt + B_A(t) + \int_{\varepsilon_n|x|<1} x\widetilde{N}(t,dx), \quad t \geq 0.$$

On veut montrer que Y_n tend vers Y uniformément sur tout intervalle compact de $[0,+\infty)$ en suivant les pas suivants.

1. Vérifier que la suite $(\varepsilon_n)_n$ est décroissante et convergente vers zéro.
2. On fixe $T > 0$ et $n \geq 1$. Dire pourquoi le processus $Y_{n+1} - Y_n$ est une martingale de carré intégrable et montrer que
$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2\Big) \leq \frac{4T}{8^n}.$$
3. En déduire que
$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \geq \frac{1}{2^n}\Big) \leq \frac{4T}{2^n}.$$
et ensuite que
$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{n\to\infty}\Big\{\sup_{0\leq t\leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| < \frac{1}{2^n}\Big\}\Big) = 1.$$
4. En déduire que la suite $(Y_n(t))_{n\geq 1}$ est presque sûrement uniformément de Cauchy sur des intervalles compacts. Conclure.