Devoir maison # 1 : Lois infiniment divisibles / branchement

Exercice 1 Montrer que toute loi de probabilité μ (resp. v.a. X) infiniment divisible est limite faible (resp. limite en loi) d'une suite de lois (v.a.) de Poisson composées.

Exercice (Bonus) On note $(Z_n^N)_{n\geq 0}$ un processus de Galton-Watson avec loi de réproduction géométrique $(p_k = 2^{-k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, et avec $Z_0^N = N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Z^N est une martingale par rapport à la filtration naturelle et que

$$\mathbb{E}\Big[(Z_n^N - Z_{n-1}^N)^2 \Big| Z_{n-1}^N\Big] = 2Z_{n-1}^N.$$

En déduire que le compensateur (variation quadratique) de Z^N est

$$\langle Z^N \rangle_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2Z_k^N. \tag{1}$$

On rappelle que l'interpolation linéaire est

$$Z_t^N = \Big(t - \frac{\lfloor tN \rfloor}{N}\Big)\Big(Z_{\lfloor tN \rfloor+1}^N - Z_{\lfloor tN \rfloor}\Big) + \frac{Z_{\lfloor tN \rfloor}}{N}$$

et que d'après le théorème de Lindvall on a $Z^N \to Y$ en loi. Peut-on relier (1) avec l'équation suivante

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t 2\, Y_s\, ds \tag{2}$$

(expliquer pourquoi (2) est vraie) ?