Université de Rennes 1,
UFR de mathématiques

2 novembre 2016

Analyse 1 - Contrôle continu (1 heure et 15 minutes)

Les documents et calculatrices sont interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice 1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle D et continue au point $a \in D$. Énoncer et donner une démonstration de la caractérisation séquentielle de la continuité de f en a.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 \in [0,2] \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,2].$$
2. Si on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ, quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?
3. Vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{1 + \sqrt{2 - u_n}}.$$
4. En déduire que la suite $\big(|u_n - 1|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite $\lambda \geq 0$.
5. On suppose $\lambda > 0$, montrer en utilisant le point 3 que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.
Que pensez-vous de ce résultat ?
6. En déduire les limites des suites $\big(|u_n - 1|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soit l'expression suivante $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 4. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) > 0$ et telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1.$$

On veut montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

1. On introduit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Montrer qu'il existe $0 < a < b$ tels que $g(a) > 1$ et $g(b) < 1$.
3. En déduire qu'il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $g(\alpha) = 1$ et conclure.
4. Est-ce que le résultat reste en général vrai lorsque $\ell = 1$?