

## Analyse 1 - Contrôle continu (1 heure)

**Les documents et calculatrices sont interdits. Les exercices sont indépendants.**

### Exercice 1.

1. Soient  $z_1$  et  $z_2$  des nombres complexes. Démontrer la relation  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$ .
2. En déduire les inégalités  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  et  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$ .

### Exercice 2.

1. Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe  $z_1 = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$ .
2. Donner sous forme exponentielle les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de  $z_1$ .
3. Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres complexes définie par la relation de récurrence

$$z_0 = 1, \quad z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

Montrer que la suite de réels  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique et donner sa raison. Exprimer  $|z_n|$  en fonction de  $n$ .

4. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) (z_{n+1} - z_n).$$

5. Soit  $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ . Donner la valeur de  $d_n$  en fonction de  $n$ .
6. Est-ce que la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée ? monotone ?
7. On note  $A_n$  le point du plan d'affixe  $z_n$ ,  $O$  l'origine. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$  et en déduire que le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_n$ .

### Exercice 3.

On considère la fonction, définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

1. La fonction  $f$  est-elle bornée ?
2. Déterminer  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  de sorte que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a \cos\left(\frac{bx}{12}\right) \cos\left(\frac{x}{12}\right)$ . On pourra utiliser la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\frac{x+y}{2}}.$$

3. La fonction  $f$  est-elle périodique ? Si oui, donner une période.