

Analyse 1 - Contrôle continu 3

(Durée 1 heure, les documents et calculatrices sont interdits. Les exercices sont indépendants.)

Exercice 1. Énoncer le théorème de Rolle et donner une démonstration.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} + \frac{\sin(e^x)}{\sqrt{x}} \right).$$

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier la parité de f .
2. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
4. Étudier les asymptotes de f .
5. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$.
6. Donner l'expression de la fonction réciproque de f .

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) \cos(x) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx, \quad \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx.$$