Université de Rennes 1,
UFR de mathématique

4 Novembre 2015

Analyse 1 - Contrôle continu

(durée 1 heure, les documents et calculatrices sont interdits. Les exercices sont indépendants.)

Exercice 1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, g deux applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que f admet une limite en x_0 notée $\ell \in \mathbb{R}$ et g admet une limite en x_0 notée $\ell' \in \mathbb{R}$. Soit $h = f + g$ l'application somme définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) + g(x).$$

Montrer que h admet une limite en x_0 et calculer cette limite. *[Il s'agit d'un résultat de cours : une démonstration détaillée et soignée est attendue.]*

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

i) Déterminer le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.

ii) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

iii) Montrer que l'équation suivante admet au moins une solution $x_0 \in]0,1[$:

$$f(x) = 1 - x^5.$$

Exercice 3. On rappelle que

$$\lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

i) Déterminer

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{1-x}.$$

ii) Trouver tous les nombres réels a et b tels que

$$\lim_{x \to 1} \frac{[\ln(2-x)]^2}{x^2 + ax + b} = 1.$$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par sa donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}.$$

i) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

ii) On suppose que $u_0 \in \{-1, 1\}$. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

iii) On suppose que $|u_0| < 1$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

iv) On suppose que $|u_0| > 1$. En remarquant que $u_1 > 1$, déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.