Université de Rennes 1,
UFR de mathématique

7 octobre 2015

Analyse 1 - Contrôle continu

(durée 1 heure, les documents et calculatrices sont interdits. Les exercices sont indépendants.)

Exercice 1.
1. Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. Démontrer la relation

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z}_2).$$

2. En déduire les inégalités

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leq |z_1 + z_2|.$$

Exercice 2. Soit w le nombre complexe défini par

$$w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Montrer que

$$\overline{w} = \frac{1}{w} = w^2.$$

2. En déduire que $w^3 = 1$ et $1 + w + w^2 = 0$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation [1]

$$(3 + i)z^2 - (8 + 6i)z + 25 + 5i = 0.$$

Exercice 4. Soit $q \in]0, 1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente. On notera ℓ sa limite.

2. Montrer que ℓ satisfait la relation $q\ell = \ell$. En déduire que $\ell = 0$.

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_0 = 0, \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 1, \quad v_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n.$$

Montrer qu'il existe un nombre n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \frac{3}{4}.$$

4. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

---

1. On donne les résultats numériques suivants, utiles à l'exercice 3 : $63^2 = 3969$, $65^2 = 4225$, $\sqrt{(-252)^2 + (-64)^2} = \sqrt{63504 + 4096} = \sqrt{67600} = 260 = 4 \times 65$, $\sqrt{256} = 16$