
Feuille de TP n°2 – Méthodes de Monte Carlo

On pourra (notamment) consulter sur le thème les ouvrages suivants : [BC07] et [Par07].

1 Prix d'options de vente et d'achat

En finance (voir par exemple [Ben04]), on a besoin de pouvoir calculer les quantités suivantes :

$$C = \mathbb{E} \left[\left(e^{\beta G} - K \right)_+ \right] \quad \text{et} \quad P = \mathbb{E} \left[\left(K - e^{\beta G} \right)_+ \right],$$

où K et β sont des constantes positives, $(\cdot)_+$ désigne la partie positive et G est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En fait, on peut exprimer ces quantités à l'aide de la fonction de répartition F de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$C = e^{\beta^2/2} F \left(\beta - \frac{\ln(K)}{\beta} \right) - KF \left(-\frac{\ln(K)}{\beta} \right) \quad \text{et} \quad P = KF \left(\frac{\ln(K)}{\beta} \right) - e^{\beta^2/2} F \left(\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta \right).$$

On peut de plus établir la relation suivante (dite de parité Put-Call) :

$$C - P = \mathbb{E} \left(e^{\beta G} - K \right) = e^{\beta^2/2} - K.$$

On se place dans le cas particulier suivant : $K = \beta = 1$.

1. Donner des valeurs (quasi-)exactes de P et C .
2. Proposer une méthode probabiliste pour déterminer P et C . Dans lequel des deux cas la méthode est-elle la plus efficace ? De combien ?
3. Utiliser la relation de parité pour améliorer les estimations de l'autre.

2 Le problème de Dirichlet sur la sphère

Soit B la boule unité dans \mathbb{R}^d et S son bord (la sphère unité) et σ la mesure uniforme (normalisée) sur S . On se donne une fonction b continue sur S et on cherche à déterminer la fonction ϕ définie par :

$$\phi(x) = \int_S b(y) P(x, y) \sigma(dy), \quad \text{où} \quad P(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^d}. \quad (1)$$

On suppose dans un premier temps que $d = 2$.

1. Montrer que la fonction ϕ peut s'écrire sous la forme

$$\forall x \in B, \quad \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(e^{i\theta}) P(x, e^{i\theta}) d\theta.$$

Comment illustrer par la simulation que, pour tout $x \in B$, $P(\cdot, e^{i\theta}) d\theta / 2\pi$ est bien une mesure de probabilité sur $[0, 2\pi]$?

2. On se donne b de la forme $b(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$. Estimer ϕ aux points $[-1 : .2 : 1]$. On donnera un intervalle de confiance pour chaque estimation.

Si l'on considère le problème de Dirichlet sur la sphère unité de \mathbb{R}^d , le problème devient numériquement plus compliqué (Pourquoi ?). La méthode de Monte-Carlo reste elle très simple à utiliser grâce au résultat suivant.

Proposition 1. *Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_d)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d . Alors la variable aléatoire $Y = X/|X|$ suit la loi uniforme sur la boule unité.*

Proposer une méthode de Monte-Carlo pour résoudre le problème de Dirichlet dans la boule unité de \mathbb{R}^4 avec la fonction $b(x) = x_1 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4$.

3 Ruine du joueur

On s'intéresse à la marche aléatoire $(S_n)_n$ sur \mathbb{Z} définie par

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ S_{n-1} + X_n & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

où les v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ sont i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$. On notera $q = 1 - p$ et $\rho = q/p$.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$, génère et trace une trajectoire de longueur n de la marche (S_n) .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère maintenant la marche issue de $k \leq n$ arrêtée quand elle atteint 0 ou n . On note T le temps d'atteinte de l'ensemble $\{0, n\}$. Retrouver par la simulation les résultats théoriques suivants :
 - (a) Temps moyen d'absorption :

$$\mathbb{E}(T) = \begin{cases} k(n-k) & \text{si } p = 1/2, \\ \frac{n}{p-q} \frac{1-\rho^k}{1-\rho^n} - \frac{k}{p-q} & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

- (b) Lieu de sortie :

$$\mathbb{P}(S_T = 0) = \begin{cases} (n-k)/n & \text{si } p = 1/2 \\ \frac{\rho^k - \rho^n}{1 - \rho^n} & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

3. Donner des intervalles de confiance pour chaque estimation.

On pourra se reporter, pour l'étude complète du problème de la ruine du joueur, à [Fel68].

Références

- [BC07] B. BERCU et D. CHAFAÏ – *Modélisation stochastique et simulation*, Dunod, 2007.
 [Ben04] N. BENAÏM, M. ABD EL KAROUÏ – *Promenade aléatoire*, Ellipses, 2004.
 [Fel68] W. FELLER – *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, 1968.
 [Par07] E. PARDOUX – *Processus de Markov et applications*, Dunod, 2007.