Feuille de TP n°3 – Chaînes de Markov

1 Un exemple simpliste

Les consommateurs de 3 produits sont répartis respectivement en 50% pour P1, 30% pour P2 et 20% pour P3. Après chaque mois, 60% restent fidèles à P1 contre 70% pour P2 et 90% pour P3. Les autres se réorientent entre les deux autres produits (de manière équiprobable).

1. Déterminer la distribution initiale ν et la matrice de transition associées (exemple : $P_{12} = 0.2$).
2. Tracer l'évolution déterministe des répartitions des consommateurs pendant les 12 premiers mois.
3. Tracer l'évolution de l'opinion d'un individu initialement adepte du produit 1 pendant les douze premiers mois(consultez l'aide pour `grand` option 'markov').
4. Même question pour un individu pris au hasard dans la population totale selon la loi ν.
5. Simuler la répartition sur douze mois des opinions de 1000 personnes (qui ne se concertent pas) choisies indépendamment dans la population.
6. Déterminez la distribution stationnaire de la matrice de transition et refaire la question 2 en prenant la distribution stationnaire comme distribution initiale des consommateurs. Quelles sont les valeurs propres de `P` ? On pourra utiliser les fonctions `spec`, `bdiag`, mais aussi de grandes puissances de P.

2 L'urne d'Ehrenfest

On dispose de m particules que l'on répartit initialement entre deux récipients A et B. À chaque pas de temps, on choisit une particule parmi les m et on la change d'urne. On note X_n le nombre de particules dans l'urne A au temps n. Pour toutes les applications, on prendra $m = 10$.

1. Expliquer pourquoi (X_n) est une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, m\}$ et donner sa matrice de transition.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? récurrente ? périodique ?
3. Écrire une fonction qui trace une trajectoire de cette chaîne.
4. Vérifier que la mesure invariante μ de cette chaîne est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, 1/2)$.
5. Illustrer le théorème ergodique par simulation *i.e.* illustrer le fait que, pour $l \in \{0, \ldots, m\}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i = l\}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\{l\}) \quad \text{p.s.}$$

6. On définit T_{ll} le temps de retour en l par $T_{ll} = \inf\{n \geq 1, X_n = l | X_0 = l\}$. Comparer, par simulation, $\mathbb{E}(T_{ll})$ et $\mu(l)$.

7. La loi de X_n converge-t-elle vers μ ?
8. Comment simuler les trajectoires d'une chaîne d'Ehrenfest lorsque le nombre de boules atteint 1000000 ?

On pourra consulter [FF02] et surtout [KS60].

3 Modèle de Wright-Fisher sans mutations

On modélise le nombre d'allèles A dans une population de $2N$ gènes par la chaîne de Markov de matrice de transition suivante :

$$p_{ij} = C_{2N}^{j} \left(\frac{i}{2N} \right)^{j} \left(1 - \frac{i}{2N} \right)^{2N-j}, \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq 2N.$$

La loi de X_{n+1} sachant que $X_n = i$ est la loi binomiale $B(2N, i/2N)$. On pourra utilisez les fonctions `binomial` et `grand` option `markov`.

1. Représentez plusieurs trajectoires de cette chaîne de Markov pour N =10, 20, 100.
2. Confrontez l'estimation numérique de la probabilité que la chaîne soit absorbée en $2N$ au résultat théorique pour N =10, 20, 100..
3. Proposez une estimation de l'espérance du temps de d'absorption de la chaîne pour N =10, 20, 100. N'oubliez pas l'intervalle de confiance !

4 Modèle de Wright-Fisher avec mutations

On remplace le modèle précédent par la chaîne suivante, avec u et v dans $]0, 1[$,

$$p_{ij} = C_{2N}^{j} \left(\frac{i}{2N}(1-u) + \left(1 - \frac{i}{2N} \right) v \right)^{j} \left(\left(1 - \frac{i}{2N} \right)(1-v) + \frac{i}{2N} u \right)^{2N-j}, \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq 2N.$$

1. Calculer la mesure invariante π pour $N = 10$ et 20. À partir de quelle valeur de N, le logiciel ne permet plus le calcul de π ?
2. Proposez une méthode s'appuyant sur le théorème ergodique pour donner une estimation des coefficients de π. Confrontez les résultats de la simulation à ceux de la question précédente pour $N = 10$ et 20.

Pour les deux modèles de Wright-Fisher, on pourra se référer à [Nor98] ou aux recueils de textes publiés.

Références

[FF02] D. Foata et A. Fuchs – *Processus stochastiques*, Dunod, 2002.

[KS60] J. G. Kemeny et J. L. Snell – *Finite markov chains*, Van Nostrand, 1960.

[Nor98] J. R. Norris – *Markov chains*, Cambridge University Press, 1998.