Prix d'options européennes

Une société française tient sa comptabilité en euros et signe un contrat avec une entreprise américaine qu'elle devra payer en dollars à la livraison. Entre aujourd'hui et la livraison le taux de change euro/dollar va fluctuer. L'entreprise est donc soumise à un risque de change : si l'euro s'effondre, le prix de la commande peut devenir exorbitant. L'entrepreneur souhaite se garantir contre ce risque. Il va pour cela payer une option dite d'achat (dans cet exemple) lui permettant, le jour de la livraison, d'obtenir des dollars à un prix K (en euros) fixé. Le problème est le suivant : quel somme demandée aujourd'hui assurera au banquier d'être en mesure, le jour de la commande, de fournir des dollars au prix K (dans le cas où le dollar vaut plus) ?

On fait dans la suite les hypothèses suivantes :

- Les investissements se répartissent uniquement sur deux actifs, l'un non risqué (placement de type épargne dont le taux est connu et supposé fixe), l'autre risqué (action ou monnaie étrangère dont le cours fluctue aléatoirement).
- Le temps est discret.
- Entre deux cotations successives, le rapport des cours de l'option ne peut prendre que deux valeurs.
- On néglige les coûts de transaction lors de la vente ou de l'achat d'actions.
- Il n'y a pas de délit d'initié : la stratégie du banquier ne s'appuie que sur les cours actuels et passés (et non futurs) de l'actif risqué.
- Le banquier se contente de faire fructifier la prime qu'il touche à l'instant initial (il n'apporte pas d'argent frais ni n'en enlève). Il s'autorise à emprunter sur l'un des deux actifs mais s'oblige à toujours avoir une fortune positive : il pourrait rembourser l'emprunt immédiatement en utilisant l'autre actif.

L'objet de ce texte est de montrer que l'on peut déterminer explicitement le juste prix que doit exiger le banquier pour disposer d'une stratégie de placement également explicite lui permettant **à coup sûr** de pouvoir tenir son engagement le jour de la livraison !

1 Options

Définition 1.1. Une option d'achat (call) européenne d'échéance N est un contrat qui donne à son détenteur le droit (mais pas l'obligation) d'acheter une action à une date N au prix K dit prix d'exercice (strike), fixé à l'avance. Ce contrat a un prix C (prime).

Remarque 1.2. Il existe de nombreux contrats d'options (sans parler des options sur les options...). On parle d'options européennes lorsque la date d'exercice de l'option est fixée à l'avance. Une option américaine par exemple peut être exercée à tout moment entre l'instant initial et la date N finale fixée.

Au temps $n = 0$, l'acheteur paie C au vendeur de l'option d'achat. Au temps N, il reçoit le maximum de $S_N - K$ et 0, noté $(S_N - K)_+$ (où S_N est le prix de l'action au temps N). Pour le vendeur de l'option, il s'agit, en cas d'exercice, d'être en mesure de fournir une action au prix K, et , par conséquent de pouvoir produire à l'échéance une richesse égale à $(S_N - K)_+$. Au moment de la vente de l'option, le cours futur de l'action est inconnu et deux questions se posent au vendeur de l'option :

1. Quel est le juste prix de l'option, c'est-à-dire quelle somme demander à l'acheteur pour être en mesure de produire une richesse $(S_N - K)_+$ à la date N ? C'est le problème du pricing.
2. Comment faire judicieusement fructifier la prime touchée à l'instant initial pour produire la richesse $(S_N - K)_+$ à la date N ? C'est le problème de la couverture.

Il existe une option duale dite de vente.

Définition 1.3. Une option de vente (put) européenne d'échéance N est un contrat qui donne à son détenteur le droit (mais pas l'obligation) de vendre une action à une date N au prix K dit prix d'exercice (strike), fixé à l'avance. Ce contrat a un prix P (prime).

Au temps $n = 0$, l'acheteur paie P au vendeur de l'option de vente. Au temps N, il reçoit le maximum de $K - S_N$ et 0, noté $(K - S_N)_+$ (où S_N est le prix de l'action au temps N).

2 Évolution des prix

On s'intéresse à un marché constitué de deux actifs :
– un actif sans risque B de taux d'intérêt r fixe,
– un actif risqué S de taux d'intérêt instantané aléatoire pouvant prendre les valeurs a et b, supposées différentes.

On décrit l'évolution des actifs par, pour tout $n = 1, \dots, N$,

$$\begin{cases} B_n = (1 + r)B_{n-1}, \\ S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}, \end{cases} \tag{1}$$

où $(\rho_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{a, b\}$ et B_0 et S_0 sont connus. On ne précise pas la loi $\mathbb{P}$ du n-uplet $(\rho_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$. La seule hypothèse sur cette loi $\mathbb{P}$ est qu'elle charge tous les singletons de l'ensemble $\{a, b\}^N$, c'est-à-dire que

$$\forall (s_1, \dots, s_N) \in \{a, b\}^N, \quad \mathbb{P}(\rho_1 = s_1, \dots, \rho_N = s_N) > 0.$$

On note $\mathcal{F}_n$ l'information dont on dispose au temps n. Comme $S_0, \dots, S_n$ sont connus au temps n, on a $\sigma(S_0, \dots, S_n) \subset \mathcal{F}_n$. L'équation (1) donne $B_n = (1 + r)^n B_0$ et $S_n = \prod_{k=1}^n (1 + \rho_k)S_0$. De plus, on notera $\tilde{S}_n$ le prix actualisé de l'action défini par $\tilde{S}_n = (1 + r)^{-n} S_n$.

3 Portefeuille et stratégie

Au cours du temps, le banquier répartit son capital entre les actifs risqué et non risqué : cette répartition est appelée portefeuille ou stratégie. Un portefeuille $\Pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n \leqslant N}$ composé au temps n de β_n unités de B et γ_n unités de S. Sa valeur au temps n est donc

$$X_n^\Pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

D'après les hypothèses, l'une des quantités β_n et γ_n peut être négative mais X_n^Π doit reste positif pour tout n.

La gestion du portefeuille s'effectue de la manière suivante. Au temps n, le banquier possède une quantité β_n et γ_n d'actifs B et S dont les cours sont B_n et S_n. Il décide alors de réinvestir sur le marché pour l'étape suivante, c'est-à-dire qu'il choisit β_{n+1} et γ_{n+1}. Ce choix s'effectue au temps n, c'est-à-dire que β_{n+1} et γ_{n+1} sont $\mathcal{F}_n$-mesurables. On dit que la suite $(\beta_n, \gamma_n)_n$ est prévisible.

Au temps n, la valeur du portefeuille est donnée par $X_n^\Pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$. Après le réinvestissement, sa valeur est donnée par $\beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n$. D'après l'hypothèse d'autofinancement, le portefeuille garde une valeur constante au moment du réinvestissement (on n'ajoute ni ne retire de l'argent), c'est-à-dire que

$$\beta_n B_n + \gamma_n S_n = \beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n.$$

Définition 3.1. Un portefeuille est dit autofinancé si, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(\beta_{n+1} - \beta_n)B_n + (\gamma_{n+1} - \gamma_n)S_n = 0.$$

On dit qu'un portefeuille est solvable si, pour tout $n \leqslant N$, $X_n^\Pi \geqslant 0$.

On appellera stratégie admissible un portefeuille $\Pi = (\beta_n, \gamma_n)_n$ prévisible, autofinancé et solvable.

4 Arbitrage et martingale

Dans cette section, on définit la notion de probabilité risque neutre. Nous allons voir que, dans notre modèle, cette probabilité existe et est unique. Le miracle, comme nous le verrons dans les sections suivantes, est que les réponses aux questions de pricing et de couverture s'exprimeront en fonction de cette mesure de probabilité et non en fonction de la loi $\mathbb{P}$ qui régit l'évolution du prix de l'action.

4.1 Probabilité risque neutre

Définition 4.1. On dit que $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre si
- $\mathbb{P}^*$ est équivalente à la probabilité $\mathbb{P}$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}^*(A) = 0$ ssi $\mathbb{P}(A) = 0$,
- le cours réactualisé de l'option $(\tilde{S}_n)_{n\leqslant N}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.

Proposition 4.2. *Dans notre modèle, une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ est une probabilité risque neutre si et seulement si, pour tout n,*

$$\mathbb{E}^*(\rho_{n+1}|\mathcal{F}_n) = r, \tag{2}$$

où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance par rapport à $\mathbb{P}^*$.

Démonstration. Il est clair que, pour tout n, $\tilde{S}_n$ est intégrable et $\mathcal{F}_n$ mesurable. De plus, soit $\mathbb{P}^*$ une mesure équivalente à $\mathbb{P}$. Alors

$$\mathbb{E}^*(\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*\left(\frac{1+\rho_{n+1}}{1+r}|\mathcal{F}_n\right)\tilde{S}_n,$$

d'où le résultat. □

Corollaire 4.3. *Il existe une probabilité risque neutre si et seulement si $r \in]a,b[$. Si $r \in]a,b[$ alors cette mesure est unique et fait des variables aléatoires $(\rho_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $(1-p)\delta_a + p\delta_b$ où $p = (r-a)/(b-a)$.*

Démonstration. Puisque ρ_n est à valeurs dans $\{a,b\}$, $\mathbb{E}^*(\rho_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ appartient à $[a,b]$. Donc si $r \notin [a,b]$, la condition (2) ne peut être satisfaite. De plus, si $r \in \{a,b\}$, (2) impose que $\mathbb{P}^*$ se concentre sur l'un des singletons $(a,\dots,a)$ ou $(b,\dots,b)$ ce qui contredit l'équivalence de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$. L'existence d'une probabilité risque neutre implique $r \in]a,b[$. Si tel est le cas, puisque ρ_n ne prend que deux valeurs, (2) impose

$$\begin{cases}\mathbb{P}^*(\rho_{n+1}=a|\mathcal{F}_n) + \mathbb{P}^*(\rho_{n+1}=b|\mathcal{F}_n) = 1,\\ a\mathbb{P}^*(\rho_{n+1}=a|\mathcal{F}_n) + b\mathbb{P}^*(\rho_{n+1}=b|\mathcal{F}_n) = r,\end{cases}$$

c'est-à-dire que, pour tout $n = 0,\dots,N-1$,

$$\mathbb{P}^*(\rho_{n+1}=b|\mathcal{F}_n) = (r-a)/(b-a) = p. \tag{3}$$

Une probabilité risque neutre existe donc bien : on peut prendre $((1-p)\delta_a + p\delta_b)^{\otimes N}$. Il reste à remarquer que c'est la seule en calculant, grâce à (3), $\mathbb{P}^*(\rho_1 = s_1,\dots,\rho_N = s_N)$ où $s_1,\dots,s_N \in \{a,b\}$. □

Remarque 4.4. En général, l'unicité de la probabilité risque neutre n'est pas assurée. Dans ce cas, on ne peut pas répondre de manière unique à la question du pricing de l'option.

Dans toute la suite, on suppose que $r \in]a,b[$. La proposition suivante décrit l'évolution stochastique d'un portefeuille autofinancé sous la probabilité risque neutre.

Proposition 4.5. *Si Π est un portefeuille autofinancé, alors sa valeur réactualisée $\big((1+r)^{-n}X_n^\Pi\big)_n$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.*

Démonstration. Comme $B_n = (1+r)^n B_0$, la valeur réactualisée du portefeuille est donnée par

$$\frac{X_n^\pi}{(1+r)^n} = \beta_n B_0 + \gamma_n \frac{S_n}{(1+r)^n} = \beta_n B_0 + \gamma_n \tilde{S}_n.$$

La composition (β_n, γ_n) du portefeuille au temps n étant $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable et $(\tilde{S}_n)_n$ étant une martingale sous $\mathbb{P}^*$ (par définition de la probabilité risque neutre) on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\left(\frac{X_n^\Pi}{(1+r)^n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= \beta_n B_0 + \gamma_n \mathbb{E}^*\left(\tilde{S}_n\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \beta_n B_0 + \gamma_n \tilde{S}_{n-1} \\ &= \frac{\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} = \frac{\beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} = \frac{X_{n-1}^\Pi}{(1+r)^{n-1}}.\end{aligned}$$

La suite $(\tilde{X}_n^\Pi)_n$ est donc bien une martingale pour $\mathbb{P}^*$. □

4.2 Arbitrage

On s'intéresse dans la suite à l'évolution du marché jusqu'à une date N fixée. En économie, l'opportunité d'arbitrage désigne la possibilité de gagner de l'argent sans prendre de risque. On formalise mathématiquement cette notion de la façon suivante.

Définition 4.6. On dit qu'il y a opportunité d'arbitrage s'il existe un portefeuille autofinancé solvable Π tel que

$$X_0^\Pi = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_N^\Pi > 0) > 0.$$

On dit que le marché est viable s'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

Remarque 4.7. Dans notre modèle, il est aisé de se convaincre que si $r \notin]a, b[$, il y a des opportunités d'arbitrage. Supposons par exemple $r \leqslant a$. Cela signifie que, quelles que soient les fluctuations du cours de l'action, celui-ci croît plus vite que celui de l'épargne. On a donc envie d'acheter de l'action. C'est effectivement ce que l'on peut faire. Notre fortune initiale est nulle. On choisit $\beta_1 < 0$ et $\gamma_1 > 0$ tels que $\beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1 = 0$. Puis, on place tout sur l'action et c'est le pactole...

Le théorème fondamental suivant relie la notion économique d'absence d'opportunité d'arbitrage à la notion mathématique d'existence d'une probabilité risque neutre.

Théorème 4.8. *Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement s'il existe au moins une probabilité risque neutre.*

Démonstration. On se contente de démontrer la condition suffisante puisque la condition nécessaire est contenue dans la remarque 4.7 (et qu'elle est difficile à obtenir dans le cas général). Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité risque neutre et Π un portefeuille autofinancé tel que $X_0^\Pi = 0$. D'après la proposition 4.5, $((1+r)^{-N} X_n^\Pi)_n$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$. En particulier,

$$\mathbb{E}^*\big((1+r)^{-N} X_N^\Pi\big) = \mathbb{E}^*\big(X_0^\Pi\big) = 0.$$

Si de plus le portefeuille est solvable au temps N, X_N^Π est une variable aléatoire positive d'espérance nulle sous $\mathbb{P}^*$. Elle est donc nulle $\mathbb{P}^* - p.s.$. Puisque $\mathbb{P}^*$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes, X_N^Π est également nulle $\mathbb{P} - p.s.$ Il ne peut donc pas y avoir opportunité d'arbitrage. □

Corollaire 4.9. *Dans le modèle présent, le marché est viable si et seulement si $r \in]a, b[$.*

5 Couverture des options européennes

Considérons le cas d'une fonction de paiement f. En pratique, $f = (S_N - K)_+$ pour une option d'achat et $f = (K - S_n)_+$ pour une option de vente.

Définition 5.1 (Portefeuille de couverture)**.** Un portefeuille Π est dit portefeuille de couverture, si sa valeur à l'échéance est supérieure ou égale à la fonction de paiement f, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_N^\Pi(\omega) \geqslant f(\omega).$$

Le prix (rationnel) d'une option correspond à la valeur initiale X_0^Π minimale que peut avoir le portefeuille de couverture autofinancé Π.

Définition 5.2. Le juste prix d'une option européenne de fonction de paiement f et d'échéance N est donné par

$$C := \inf \left\{ X_0^\Pi \text{ tel que } \begin{array}{l} -\Pi \text{ est autofinancé} \\ -\forall \omega \in \Omega,\ X_N^\Pi(\omega) \geqslant f(\omega) \end{array} \right\}.$$

Par hypothèse, dans le modèle présent, il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$. Le résultat suivant établit le prix d'une option en fonction de $\mathbb{P}^*$. Le résultat fondamental suivant est que le juste prix d'une option ne dépend que de la probabilité risque neutre et non de la loi *véritable et inconnue* du prix de l'actif risqué !

Théorème 5.3 (Prix d'une option européenne)**.** *Supposons que la fonction de paiement de l'option soit de la forme $f(\omega) = g(S_N(\omega))$ (c'est le cas pour les options européennes d'achat et de vente). Posons*

$$F_n^*(x) := \mathbb{E}^*(g(S_n)|S_0 = x) = \sum_{k=0}^n g\big(x(1+b)^k(1+a)^{n-k}\big) C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

où $p = (r-a)/(b-a)$.

Alors, le prix d'une option européenne de fonction de paiement f à l'échéance N est

$$C = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*(f) = (1+r)^{-N} F_N^*(S_0).$$

De plus, il existe un portefeuille de couverture autofinancé Π^* de valeur initiale C dont la valeur au temps n est donnée par

$$X_n^{\Pi^*} = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}^*(f|\mathcal{F}_n) = (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*(g(S_N)|\mathcal{F}_n) = (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}^*(S_n). \tag{4}$$

Démonstration. Considérons un portefeuille de couverture autofinancé Π. Sous $\mathbb{P}^*$, la valeur réactualisée du portefeuille $((1+r)^{-n}X_n^\Pi)_{n\leqslant N}$ est une martingale donc

$$\mathbb{E}^*\big((1+r)^{-N}X_N^\Pi\big) = X_0^\Pi.$$

Or, pour tout $\omega \in \Omega$, $X_N^\Pi(\omega) \geqslant f(\omega)$ donc

$$X_0^\Pi \geqslant \mathbb{E}^*\big((1+r)^{-N}f\big),$$

et

$$C := \inf \left\{ X_0^\Pi \text{ tel que } \begin{array}{l} -\Pi \text{ est autofinancé} \\ -\forall \omega \in \Omega,\ X_N^\Pi(\omega) \geqslant f(\omega) \end{array} \right\} \geqslant \mathbb{E}^*\big((1+r)^{-N}f\big).$$

Il reste à montrer qu'avec une fortune initiale $\mathbb{E}^*\big((1+r)^{-N}f\big)$ le vendeur de l'option peut se couvrir à l'échéance N. Pour cela, on se contente de montrer que l'on peut construire une stratégie autofinancée admissible fournissant une valeur de portefeuille donnée par (4). Ceci est vrai pour $n = 0$ par définition. Soit $n \geqslant 1$. On dispose des valeurs de $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$. On doit choisir β_n^* et γ_n^* tels que

$$\begin{cases} \beta_n^* B_0(1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1}(1+a) = (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+a)) \\ \beta_n^* B_0(1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1}(1+b) = (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+b)). \end{cases}$$

Ces relations permettent de déterminer (de manière unique) la composition du portefeuille au temps n :

$$\gamma_n^* = (1+r)^{-(N-n)} \frac{F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+b)) - F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+a))}{(b-a)S_{n-1}} \tag{5}$$

et

$$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\Pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_0(1+r)^{n-1}} = \frac{(1+r)^{-(N-n+1)} F_{N-n+1}^*(S_{n-1}) - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_0(1+r)^{n-1}}. \tag{6}$$

On a ainsi construit une stratégie produisant à l'échéance N la fortune f à partir d'une richesse initiale $\mathbb{E}^*\big((1+r)^{-N} f\big)$: cette prime est donc bien le juste prix. □

Corollaire 5.4. *Si pour tout n, C_n et P_n désignent les prix respectifs des options d'achat et de vente à l'instant n d'échéance N, alors*

– *Le prix, à la date n, d'une option d'achat d'échéance N est*

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*((S_N - K)_+ | \mathcal{F}_n).$$

– *Le prix, à la date n, d'une option de vente d'échéance N est*

$$P_n = (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*((K - S_N)_+ | \mathcal{F}_n).$$

– *Ces prix vérifient la relation dite de parité Call/Put :*

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.$$

En particulier,

$$C_0 = (1+r)^{-N} \mathbb{E}^*((S_N - K)_+), \quad P_0 = (1+r)^{-N} \mathbb{E}^*((K - S_N)_+), \quad C_0 - P_0 = S_0 - K(1+r)^{-N}.$$

Démonstration. Les deux premiers points sont des conséquences immédiates du théorème 5.3. De plus,

$$C_n - P_n = (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*(S_n - K | \mathcal{F}_n) = S_n - K(1+r)^{-(N-n)},$$

car $(\tilde{S}_n)_n$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$. □

En vertu du théorème 5.3, le vendeur dispose d'un prix explicite pour les options européennes d'achat et de vente. Reste à savoir si ces quantités sont faciles à calculer. Par exemple, le prix d'une option d'achat européenne, i.e. $g(S_N) = (S_N - K)_+$, est donné par

$$C = S_0 \mathcal{B}(k_0, N, p') - (1+r)^{-N} K \mathcal{B}(k_0, N, p),$$

où

$$p' = \frac{1+b}{1+r} p \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(k_0, N, p) = \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

et

$$k_0 := \min\left\{k \in \mathbb{N},\ S_0(1+a)^{N-k}(1+b)^k > K\right\} = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N} \Big/ \ln \frac{1+b}{1+a}\right],$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x. Le prix s'exprime donc comme une somme finie de termes. Cependant, si N est grand, ce calcul peut s'avérer lourd. On est donc désireux d'approcher ce modèle discret par un modèle continu plus simple prenant en compte le fait que N est grand et que l'on suit de près le cours de la bourse, c'est-à-dire que le pas de temps est petit.

6 Une approximation gaussienne

On propose ici une approximation utile en pratique des prix de put et de call. Pour cela, on suppose que l'échéance est lointaine, le nombre de cotations grand et les fluctuations des prix des actions petites (entre deux cotations successives) mais grandes devant le taux d'intérêt.

6.1 Le théorème de convergence

Théorème 6.1. *Soit $T > 0$. Posons $r_N = RT/N$, $\ln((1+a_N)/(1+r_N)) = -\sigma/\sqrt{N}$ et $\ln((1+b_N)/(1+r_N)) = \sigma/\sqrt{N}$. Alors, si $C^{(N)}$ et $P^{(N)}$ désignent les prix respectifs des options d'achat et de vente européennes avec les paramètres ci-dessus,*

$$P^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} P = \mathbb{E}\left[\left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\sigma^2/2+\sigma Y}\right)_+\right], \quad et \quad C^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} C = \mathbb{E}\left[\left(S_0 e^{-\sigma^2/2+\sigma Y} - Ke^{-RT}\right)_+\right],$$

où Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. De plus, on a encore la relation de parité Call/Put

$$C - P = S_0 - Ke^{-RT}.$$

Démonstration. On a, d'après le théorème 5.3,

$$\begin{aligned}
C^{(N)} &= (1+r_N)^{-N}\mathbb{E}^*\left[\left(S_0 \prod_{k=1}^N T_k^{(N)} - K\right)_+\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[\left(S_0 \exp\left(\sum_{k=1}^N \ln \frac{T_k^{(N)}}{1+r_N}\right) - K(1+r_N)^{-N}\right)_+\right]
\end{aligned}$$

où les v.a. $(T_k^{(N)})$ sont i.i.d. de loi $p_N\delta_{b_N} + (1-p_N)\delta_{a_N}$ sous $\mathbb{P}^*$. De même,

$$\begin{aligned}
P^{(N)} &= (1+r_N)^{-N}\mathbb{E}^*\left[\left(K - S_0 \prod_{k=1}^N T_k^{(N)}\right)_+\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[\left(K(1+r_N)^{-N} - S_0 \exp\left(\sum_{k=1}^N \ln \frac{T_k^{(N)}}{1+r_N}\right)\right)_+\right]
\end{aligned}$$

Soit $(U_k^{(N)})$ les v.a. définies par $U_k^{(N)} = \ln(U_k^{(N)}/(1+r_N))$ sont i.i.d. de loi $p_N\delta_{\sigma/\sqrt{N}} + (1-p_N)\delta_{-\sigma/\sqrt{N}}$. On a

$$\begin{aligned}
C^{(N)} &= \mathbb{E}^*\left[\left(S_0 \exp\left(\sum_{k=1}^N U_k^{(N)}\right) - K(1+r_N)^{-N}\right)_+\right], \\
P^{(N)} &= \mathbb{E}^*\left[\left(K(1+r_N)^{-N} - S_0 \exp\left(\sum_{k=1}^N U_k^{(N)}\right)\right)_+\right].
\end{aligned}$$

Pour étudier le comportement de ces espérances, on utilise le résultat suivant.

Lemme 6.2. *La suite $(Y_N)_N$ définie par $Y_N = U_1^{(N)} + \cdots + U_N^{(N)}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(-\sigma^2/2, \sigma^2)$.*

Ce lemme fournit le résultat pour la convergence de P_N. Le cas de la convergence de $(C_N)_N$ est un tout petit peu plus subtil... Il peut aussi se déduire de la première convergence en utilisant la relation dite de parité Call/Put qui assure que, pour tout N,

$$C^{(N)} - P^{(N)} = S_0 - K(1+r_N)^{-N}$$

et on passe à la limite. □

6.2 Application pratique

Pour résumer, le calcul des prix d'options d'achat et de vente se résume au calcul, après une normalisation correcte, des quantités

$$A(K,\sigma) = \mathbb{E}\Big[\big(K - e^{\sigma Y}\big)_+\Big] \quad \text{et} \quad B(K,\sigma) = \mathbb{E}\Big[\big(e^{\sigma Y} - K\big)_+\Big], \tag{7}$$

où Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et K et σ sont des constantes strictement positives.

Remarquons immédiatement qu'un calcul direct permet d'obtenir une formule exacte pour ces quantités :

$$\begin{cases} A(K,\sigma) = K\Phi\left(\dfrac{\ln K}{\sigma}\right) - e^{\sigma^2/2}\Phi\left(\dfrac{\ln K}{\sigma} - \sigma\right), \\ B(K,\sigma) = e^{\sigma^2/2}\left(1 - \Phi\left(\dfrac{\ln K}{\sigma} - \sigma\right)\right) - K\left(1 - \Phi\left(\dfrac{\ln K}{\sigma}\right)\right), \end{cases}$$

où Φ est la fonction de répartition Y. De plus, on a $B - A = e^{-\sigma^2} - K$.

Sur ce cas d'école, on voudrait tester des méthodes probabilistes astucieuses basées sur la méthode de Monte-Carlo pour calculer A et B.

Remarque 6.3. La quantité A est l'espérance d'une variable aléatoire bornée par K, ce qui n'est pas le cas de B. Pour estimer B, il sera en général plus malin d'estimer A et d'utiliser la relation de parité que d'estimer directement B.

Supposons que $K = 1$. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est proche de $x \mapsto x$ pour $|x|$ petit. On écrit alors

$$A(1,\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-e^{\sigma y})_+}{\sigma|y|}\sigma|y|e^{-y^2/2}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{\sigma\sqrt{x}})_+ + (1-e^{-\sigma\sqrt{x}})_+}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}\,\frac{dx}{2}.$$

Ainsi,

$$A(1,\sigma) = \mathbb{E}\left(\frac{\left(1-e^{\sigma\sqrt{X}}\right)_+ + \left(1-e^{-\sigma\sqrt{X}}\right)_+}{\sqrt{2\pi X}}\right), \tag{8}$$

où X suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$. La méthode de Monte-Carlo basée sur l'expression (8) est bien meilleure que celle construite sur (7).

7 Suggestions

- Il convient de présenter le problème du calcul du prix des options européennes d'achat et de vente et le modèle choisi pour l'évolution des cours des actifs. On pourra notamment insister sur les hypothèses d'autofinancement et de prévisibilité.
- On pourra démontrer la proposition 4.2 et le corollaire 4.3.
- On pourra démontrer la proposition 4.5.
- On n'hésitera pas à éviter de parler d'arbitrage et on pourra sans problème se placer directement sous l'hypothèse $a < r < b$.

- On pourra illustrer l'efficacité de la stratégie de couverture dans un cas simple en utilisant les relations (5) et (6). On prendra par exemple $N = 4$, $r = 0$, $b = -a = 1/2$.
- On pourra démontrer le théorème 6.1.
- On pourra commenter les diverses méthodes de simulation des prix des options en expliquant en particulier le sens de la remarque 6.3 et le phénomène de réduction de variance mis en évidence en (8).