–Texte–
Le problème de Dirichlet

Mots-clefs : chaîne de Markov, martingale, méthode de Monte-Carlo.

1 Modélisation de la répartition de la température dans un corps

Considérons un solide homogène. Si la tempréature sur la surface extérieure de ce solide est fixée (non nécessairement constante), la température à l'intérieur va converger vers un équilibre thermique. Quelles sont les propriétés de cet équilibre ?

Si la température au bord du solide est continue, il semble raisonnable que ce soit encore le cas sur l'ensemble du solide. De plus, la température en un point intérieur quelconque P devrait être égale à la moyenne des températures prises sur une petite boule centrée en P et incluse dans le solide : la température vérifie la formule de la moyenne[1].

Connaissant la température en tous les points de la surface du solide en équilibre thermique, peut-on déterminer la température en un point intérieur ?

Traduisons dans un contexte mathématique le problème de Dirichlet. Soit D ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$ et $\overline{D}$ son adhérence (qui représente le solide). Soit b une fonction continue définie sur ∂D dans $\mathbb{R}$. On cherche une fonction ϕ définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout point x de ∂D, $\phi(x) = b(x)$,
2. ϕ est continue sur $\overline{D}$,
3. ϕ vérifie la formule de la moyenne : pour tout $x \in D$, et tout $r < \mathrm{dist}(x, \partial D)$,

$$\phi(x) = \int_{B(0,r)} \phi(x+y)\, \lambda_{B(0,r)}(dy), \qquad (\mathcal{M})$$

   où $\lambda_{B(0,r)}$ est la mesure uniforme sur la boule $B(0,r)$.

On dira alors que ϕ est solution du problème de Dirichlet sur D avec conditions aux bords b.

[1] Ce que l'on peut reformuler ainsi : « Les pieds dans le four, la tête dans le frigo, en moyenne, je suis bien ! ».

2 Un peu d'analyse

On peut reformuler le problème de Dirichlet en termes d'équations aux dérivées partielles.

Proposition 2.1. *Une fonction ϕ est solution du problème de Dirichlet sur D avec conditions au bord b, si et seulement si, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et continue sur $\overline{D}$ et vérifie*

$$\begin{cases} \Delta\phi(x) = 0 & \textit{pour tout } x \in D, \\ \phi(x) = b(x) & \textit{pour tout } x \in \partial D. \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

Démonstration. Si ϕ est continue et vérifie la formule de la moyenne alors ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D. En effet, soit Ψ_ε une fonction[2] de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive, d'intégrale 1, à support dans la boule $B(0,\varepsilon)$ et radiale (*i.e.* qui ne dépend que de la norme). Alors $\phi * \Psi_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour ε assez petit, $\phi = \phi * \Psi_\varepsilon$. Enfin, pour $\|y\|$ assez petit, on a

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \nabla\phi(x)\cdot y + \frac{1}{2}(\mathrm{Hess}(\phi)(x)y)\cdot y + o(\|y\|^2). \tag{1}$$

En intégrant cette relation sur la sphère de rayon r contre la mesure uniforme et en faisant tendre r vers 0, on obtient que $\Delta\phi(x) = 0$. La réciproque s'obtient en intégrant (1) sur une petite boule. □

Il existe de nombreux théorèmes étudiant l'existence et/ou l'unicité de la solution du problème de Dirichlet mais bien sûr la solution n'est en général pas explicite. Dans certains cas très particuliers, il est cependant possible de donner une représentation intégrale relativement explicite de la solution du problème de Dirichlet. Dans d'autres cas, il est possible de mettre en place des méthodes numériques (déterminites ou probabilistes) pour résoudre ce problème.

3 Le cas de la boule unité

Supposons que D est la boule de rayon r dans $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, le problème de Dirichlet admet une solution explicite.

Proposition 3.1. *Le problème de Dirichlet sur la boule de rayon r dans $\mathbb{R}^d$ de condition au bord b admet une solution unique ϕ qui s'écrit :*

$$\phi(x) = \int_{\partial B(0,r)} b(y) P_r(x,y)\,\sigma_r(dy), \tag{2}$$

où σ_r est la mesure uniforme sur la sphère centrée en 0 de rayon r et

$$P_r(x,y) = \frac{r^{d-2}(r^2 - |x|^2)}{|y-x|^d}.$$

[2]Par exemple $\Psi_\varepsilon(x) = c(\varepsilon)\exp(1/(|x|^2 - \varepsilon^2))\mathbf{1}_{\{|x|<\varepsilon\}}$.

Remarque 3.2. On voit ici que $\phi(x)$ est une moyenne des valeurs au bord de D pondérée par la mesure de probabilité de densité $P(x,y)$ par rapport à la mesure uniforme sur $\partial B(0,r)$.

Dans le cas particulier où D est la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$, la proposition 3.1 assure que le problème de Dirichlet admet une unique solution qui se représente ainsi

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} b\big(re^{i\theta}\big) P_r(x, re^{i\theta})\, d\theta & \text{si } x \in D, \\ b(x) & \text{si } x \in \partial D. \end{cases}$$

La résolution du problème de Dirichlet se ramène donc dans ce cas particulier au calcul d'une intégrale sur $[0, 2\pi]$. On peut donc calculer une valeur approchée de u au point x par une méthode numérique déterministe ou probabiliste.

Si l'on considère le problème de Dirichlet sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, le problème devient numériquement plus compliqué. En effet, pour le calcul de l'intégrale par une méthode numérique, il s'agit de discrétiser la sphère, ce qui est plus délicat que de discrétiser un intervalle ou un pavé... La méthode de Monte-Carlo reste elle très simple à utiliser grâce au résultat suivant.

Proposition 3.3. *Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors la variable aléatoire $Y = X/|X|$ suit la loi uniforme sur la boule unité.*

Démonstration. Remarquons que Y est bien définie sauf sur l'ensemble $\{X = 0\}$ qui est bien entendu de mesure nulle. De plus, la loi de X est invariante par toute rotation. En d'autres termes, si O est une matrice orthogonale, OX a même loi que X. Il en est de même pour Y. Or la seule loi de probabilité sur la sphère unité (munie de sa tribu borélienne) qui soit invariante par rotation est la mesure uniforme. □

Ainsi, même pour d grand, il est aisé de simuler des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\partial B(0,1)$ et donc de proposer une estimation de $\phi(x)$ *via* (2) et la méthode de Monte-Carlo.

4 Approche numérique

Pour résoudre de manière approchée ce problème aux dérivées partielles, on se propose de discrétiser l'espace. Soit $h > 0$ le pas de discrétisation. On définit la grille D_h comme l'intersection de D et du réseau $h\mathbb{Z}^d$:

$$D_h := D \cap h\mathbb{Z}^d = \big\{x \in D,\ \exists (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d,\ x = (hi_1, \ldots, hi_d)\big\}.$$

On dira que deux éléments x et y de $h\mathbb{Z}^d$ sont voisins, et on notera $x \sim y$ si $|x-y| = h$ (où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$). L'opérateur laplacien est lui remplacé par l'opérateur aux différences :

$$\Delta_h f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)).$$

Cette substitution est justifiée par la remarque suivante.

Remarque 4.1. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\Delta_h f(x) = \frac{h^2}{2d} \Delta f(x) + o(h^2).$$

On dit que ϕ_h est h-harmonique sur D_h si $\Delta_h \phi_h = 0$ sur D_h. On définit également la frontière de D_h par

$$\partial_h D_h = \{y \in D_h^c,\ \exists x \in D_h,\ x \sim y\}.$$

Il convient également de définir une fonction b_h sur $\partial_h D_h$ qui soit une approximation raisonnable de b définie sur ∂D.

Le problème de Dirichlet discret est alors le suivant : trouver ϕ_h sur $D_h \cup \partial_h D_h$ telle que

$$\begin{cases} \Delta_h \phi_h(x) = 0 & \text{pour tout } x \in D_h, \\ \phi_h(x) = b_h(x) & \text{pour tout } x \in \partial_h D_h. \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$'}$$

Puisque D_h est un ensemble fini, résoudre le problème de Dirichlet ($\mathcal{D}$') revient à résoudre un système linéaire de $\mathrm{Card}(D_h)$ équations à $\mathrm{Card}(D_h)$ inconnues. Il est possible de résoudre ce système par une méthode directe, au moins en dimension $d = 2$. Une des observations qui simplifie grandement les calculs est que au plus $2d + 1$ inconnues sont impliquées dans chaque équation. Cette méthode directe permet, au terme des calculs, de déterminer simultanément la valeur de la solution ϕ_h en tout point de la grille D_h. Cette méthode est payante lorsque l'on veut déterminer la température du corps en tous les points du solide.

L'approche probabiliste est un peu différente. Elle permet d'estimer la température en un point donné (mais demande de tout refaire pour chaque nouveau point). Considérons la marche aléatoire symétrique aux plus proches voisins $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sur le réseau $h\mathbb{Z}^d$, c'est-à-dire la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée par :

$$P_{xy} = \begin{cases} \dfrac{1}{2d} & \text{si } |x - y| = h, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Soit $x \in D_h \cup \partial_h D_h$. On considère la chaîne issue de x, c'est-à-dire que $X_0 = x$ presque sûrement. On définit le temps τ de sortie de D_h de cette marche issue de x par

$$\tau = \inf \{n \in \mathbb{N},\ X_n \notin D_h\}.$$

Remarque 4.2. Si $x \in \partial_h D_h$, τ est nul presque sûrement. Le processus X stoppé lorsqu'il atteint le bord de D_h est une chaîne de Markov à espace d'états fini dont les points absorbants sont $\partial_h D_h$ et les points transients sont D_h. Ainsi, le temps d'atteinte de $\partial_h D_h$ est fini p.s. et même intégrable.

La proposition suivante fournit la représentation d'une solution du problème de Dirichlet discret.

Proposition 4.3. *La fonction ψ_h définie sur $D_h \cup \partial_h D_h$*

$$\forall x \in D_h \cup \partial_h D_h, \quad \psi_h(x) := \mathbb{E}(b(X_\tau)|X_0 = x) \tag{3}$$

est solution du problème ($\mathcal{D}$').

Démonstration. D'après les propriétés de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, pour tout $x \in D_h$, τ est fini presque sûrement. Le fait que ψ_h soit égale à b sur le bord est évident. Pour la propriété d'harmonicité, on écrit, pour un point x à l'intérieur de D_h, en vertu de la propriété de Markov,

$$\psi_h(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} \mathbb{E}(b(X_{\tau_D})|X_0 = y) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} \psi_h(y),$$

ce qui assure que $\Delta_h \psi_h(x) = 0$. □

L'approche probabiliste fournit également l'unicité de la solution du problème ($\mathcal{D}$').

Proposition 4.4. *Si ϕ_h une solution du problème ($\mathcal{D}$'), alors $\phi_h = \psi_h$ où ψ_h est définie par* (3).

Démonstration. On remqarque que, puisque ϕ_h est h-harmonique, $(\phi_h(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale. Le théorème d'arrêt assure alors que $\phi_h(x) = \mathbb{E}(b(X_\tau)|X_0 = x)$, ce qui fournit le résultat. □

Remarque 4.5. La fonction ψ_h est la moyenne de la fonction b pondérée par la mesure de sortie de D_h par la marche symétrique. Il est donc clair que ψ_h vérifie le principe du maximum discret :

$$\max_{D_h \cup \partial D_h} \psi_h = \max_{\partial D_h} \psi_h.$$

L'algorithme probabiliste repose sur la méthode de Monte-Carlo : il estime $\phi_h(x)$ par la moyenne empirique des valeurs prises par b sur les valeurs finales d'un grand nombre de trajectoires indépendantes partant de x est arrêtées lors qu'elles ont atteint le bord de la grille.

Exemple 4.6 (La boule dans $\mathbb{R}^2$)**.** Puisque l'on connaît une solution quasi explicite dans le cas de la boule unité de $\mathbb{R}^2$, on peut la comparer à la solution par discrétisation de l'espace $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{Z}^2/N$ puis de mettre en place la méthode déterministe ou la méthode probabiliste. Cette dernière consiste à simuler p marches aléatoires sur le réseau $\mathbb{Z}^2/N$ issues de x et arrêtées lorsqu'elles sortent de D. Le point de sortie de la marche n'est pas sur la sphère mais si N est grand, il n'en est pas loin. On peut imaginer différentes procédures naturelles pour associer à un point de sortie un point de la sphère qui soit proche (projection radiale...).

5 Le demi-plan supérieur

Le but de cette section est d'illustrer dans un cas particulier la convergence de la solution du problème discret ($\mathcal{D}$') vers la solution du problème ($\mathcal{D}$). Soit N un entier (le pas de discrétisation est choisi de la forme $h = 1/N$). On note $(X_n^N, Y_n^N)_n$ la marche aléatoire sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, partant de $(X_0^N, Y_0^N) = (0,1)$, telle que les suites de variables aléatoires $(X_{n+1}^N - X_n^N)$ et $(Y_{n+1}^N - Y_n^N)$ soient indépendantes entre elles, formées de variables indépendantes de même loi :

$$\mathbb{P}((X_{n+1}^N - X_n^N) = -1/N) = \mathbb{P}((X_{n+1}^N - X_n^N) = 1/N) = 1/2,$$
$$\mathbb{P}((Y_{n+1}^N - Y_n^N) = -1/N) = \mathbb{P}((Y_{n+1}^N - X_n^Y) = 1/N) = 1/2.$$

À chaque pas, la marche choisit au hasard entre les 4 points diagonalement opposés sur les 4 carrés de côté $1/N$ voisins. Cette modification légère de la manière de discrétiser le problème permet d'assurer que $(X_n^N)_n$ et $(Y_n^N)_n$ sont deux marches aléatoires simples indépendantes, ce qui simplifiera le raisonnement par la suite.

On s'intéresse à l'instant de sortie et à l'abscisse de sortie de la marche aléatoire ainsi définie hors du demi-plan supérieur. L'instant de sortie est la variable aléatoire T^N définie par :

$$T^N = k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i < k,\ Y_i^N > 0 \text{ et } Y_k^N = 0.$$

L'abscisse de sortie U^N est l'abscisse de la marche aléatoire à l'instant de sortie T^N :

$$T^N = k \quad \Longrightarrow \quad U^N = X_k^N.$$

Proposition 5.1. *La suite $(U^N)_N$ converge en loi, quand N tend vers l'infini, vers la loi de Cauchy de densité :*

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration. Les principales étapes de la preuve sont les suivantes :

1. La fonction génératrice G du temps d'atteinte du niveau -1 pour la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ vérifie l'équation

$$G(s) = \frac{s}{2} + \frac{s}{2}G(s)^2,$$

et vaut donc

$$G(s) = \frac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}.$$

2. La fonction génératrice G_N de T^N est égale à $G_N(s) = G(s)^N$.
3. On en déduit la fonction caractéristique de U^N.
4. La convergence en loi de U^N en découle.

□

Remarque 5.2. On peut montrer que le problème de Dirichlet sur le demi-plan supérieur admet la représentation suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} b(z) P(x,y,z)\, dz,$$

où $(x,y) \mapsto P(x,y,z)\, dz$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ avec en particulier

$$P((0,1),z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}.$$

6 Suggestions.

Pour traiter le sujet, on suggère de répondre à certaines des questions suivantes.

1. Commenter le modèle et expliquer pourquoi il peut permettre de déterminer la hauteur d'une membrane tendue sur un fil de fer.
2. On pourra commenter la proposition 2.1.
3. On pourra démontrer les propositions 4.3 et 4.4.
4. On pourra illustrer la convergence la méthode probabiliste dans le cas de la boule unité de $\mathbb{R}^2$. On pourra aussi éventuellement implémenter la méthode déterministe.
5. Dans le cas de la boule de $\mathbb{R}^d$, on pourra discuter les avantages et inconvénients respectifs des méthodes déterministe et probabiliste pour le calcul approché l'intégrale. On essaiera notamment d'expliciter l'ordre de grandeur de complexité des deux méthodes en fonction de d.
6. On pourra démontrer la proposition 5.1.
7. Implémenter un algorithme de simulation de la marche aléatoire, de manière à réaliser une étude expérimentale du comportement asymptotique de T^N et U^N.