– Texte – Ruine d'une compagnie d'assurance

Une nouvelle compagnie d'assurance veut entrer sur le marché. Elle souhaite évaluer sa probabilité de faillite en fonction du capital initial investi. On suppose que la compagnie a un capital initial c et on note R_t la réserve de la compagnie d'assurance à l'instant t. La compagnie d'assurance

- perçoit des cotisations de ces clients que l'on supposera mensualisées et uniformément réparties sur l'année : les recettes de la compagnie pendant un temps t sont donc égales à pt où p est le taux de cotisations par unité de temps.
- verse des primes à ses assurés sinistrés en fonction du dommage qu'ils subissent.

On modélise l'apparition et les coûts des sinistres de la manière suivante :

- les coûts des sinistres $(X_k)_{k\geqslant 1}$ sont des variables indépendantes, de même loi ν et d'espérance commune λ,
- les intervalles de temps entre deux sinistres $(\tau_k)_{k\geqslant 1}$ (τ_1 étant l'instant du premier sinistre) sont indépendants entre eux et indépendants des sinistres. On suppose qu'ils suivent tous la loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$. On note N_t le nombre de sinistres pendant l'intervalle $[0,t]$. Le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson.

La réserve de la compagnie d'assurance à l'instant t est par conséquent :

$$R_t = c + pt - \sum_{k=1}^{N_t} X_k.$$

La ruine survient lorsque les réserves descendent sous 0. On peut donc écrire sa probabilité de ruine de la façon suivante :

$$\psi(c) = \mathbb{P}\left(\inf_{t\geqslant 0} R_t < 0 | R_0 = c\right).$$

On introduit les variables suivantes

$$\begin{aligned} S_t &= c - R_t \quad \forall t \geqslant 0, \\ \tau(c) &= \inf\{t \geqslant 0 : R_t < 0\} = \inf\{t \geqslant 0 : S_t > c\}. \end{aligned}$$

La probabilité de ruine peut alors être vue comme

$$\psi(c) = \mathbb{P}(\tau(c) < \infty).$$

1 Processus de Poisson simple et composé

Définition 1.1. Le processus de comptage $(N_t)_{t\geqslant 0}$ défini de la manière suivante :

- $N_0 = 0$,
- pour $t > 0$, $N_t = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{T_n \leqslant t} = \sup\{k \geqslant 1 : T_k \leqslant t\}$,

où $T_0 = 0$ et les variables $(\tau_k)_{k\geqslant 1} = (T_k - T_{k-1})_{k\geqslant 1}$ sont des variables indépendantes et de loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$ est appelé processus de Poisson (simple) d'intensité μ.

Proposition 1.2. *Le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *presque sûrement, la trajectoire $t \mapsto N_t$ est croissante avec des sauts de hauteur 1,*
2. *pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre μt,*
3. *$\forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall\, 0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_p$, les variables $N_{t_1} - N_{t_0}, ..., N_{t_p} - N_{t_{p-1}}$ sont indépendantes. De plus, on a l'égalité en loi suivante : $\mathcal{L}(N_{t_k} - N_{t_{k-1}}) = \mathcal{L}(N_{t_k - t_{k-1}})$ pour tout $k \in \{1, ...p\}$. On dit que les accroissements de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ sont indépendants et stationnaires.*
4. *Sachant que $N_t = k$, la loi jointe de $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ est la loi d'un échantillon ordonné de variables aléatoires i.d.d. de loi uniforme sur $[0, t]$.*

Il est possible d'estimer l'intensité d'un processus de Poisson à partir d'une de ses trajectoires comme le montre le résultat suivant.

Proposition 1.3. *Soit N un processus de Poisson d'intensité μ alors*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \mu \quad et \quad \sqrt{t}\left(\frac{N_t}{t} - \mu\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mu),$$

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, posons $Y_i = N_i - N_{i-1}$. La variable Y_i représente le nombre de sauts du processus de Poisson dans l'intervalle de temps $[i-1, i[$. D'après la proposition 1.2, les variables aléatoires $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ sont indépendantes de même loi de Poisson de paramètre μ. Donc, en vertu de la loi des grands nombres, $N_{[t]}/[t] \xrightarrow[t\to\infty]{} \mu$ *p.s.* On remarque ensuite l'encadrement suivant

$$\frac{N_{[t]}}{[t]}\frac{[t]}{t} \leqslant \frac{N_t}{t} \leqslant \frac{N_{[t]+1}}{[t]+1}\frac{[t]+1}{t}$$

qui permet de conclure que N_t/t tend vers μ presque sûrement. La convergence en loi se déduit du calcul explicite, puisque N_t suit la loi $\mathcal{P}(\mu t)$, de la fonction caractéristique de $\sqrt{t}(N_t/t - \mu)$. □

Définition 1.4. Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson (simple) d'intensité μ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.d.d. de loi ν indépendante de N. Le processus C défini par

$$\forall t \geqslant 0, \quad C_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k,$$

est appelé processus de Poisson composé de paramètre μ et de loi de saut ν.

Proposition 1.5. *La fonction caractéristique de C_t est donnée par*

$$\varphi_{C_t}(u) = \exp(\mu t(\varphi(u) - 1)),$$

où φ est la fonction caractéristique de ν.

Si ν admet un moment d'ordre 2 et que l'on note λ et a ses deux premiers moments alors C_t admet un moment d'ordre 2,

$$\mathbb{E}(C_t) = \mu\lambda t, \quad \mathbb{V}(C_t) = \mu a t, \quad \frac{C_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \mu\lambda \quad \textit{et} \quad \sqrt{t}\left(\frac{C_t}{t} - \mu\lambda\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mu a).$$

Démonstration. L'expression des moments de C_t et le résultat de convergence en loi découlent de l'expression de la fonction caractéristique de C_t. La convergence presque sûre s'obtient en utilisant la proprosition 1.3 et la loi des grands nombres. □

2 La ruine est-elle presque sûre ?

Le coefficient $\alpha = \lambda\mu$ est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il paraît prudent que l'assureur fixe un paramètre p supérieur à α pour que, en moyenne, les recettes soient supérieures aux dépenses. La ruine ne pouvant intervenir qu'à un instant de saut T_n, il nous suffit de considérer la suite de variables aléatoires $(\tilde{S}_n)_n$ représentant S à ses temps de saut :

$$\tilde{S}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad \tilde{S}_n = S_{T_n} = \sum_{k=1}^{n} X_k - pT_n.$$

Proposition 2.1. *Les positions relatives de α et p déterminent la survie de la compagnie :*

- *Si $p < \alpha$ alors $\lim_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = +\infty$ p.s., par conséquent $\psi(c) = 1$ pour tout $c \geqslant 0$.*
- *Si $p = \alpha$ alors $\liminf_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = -\infty$ p.s. et $\limsup_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = +\infty$ p.s., d'où $\psi(c) = 1$ pour tout $c \geqslant 0$.*
- *Si $p > \alpha$ alors $\lim_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = -\infty$ p.s., et donc $\psi(c) < 1$ pour tout $c \geqslant 0$.*

Démonstration. Si $p < \alpha$, le résultat découle de la loi des grands nombres. Si $p = \alpha$, on remarque que $\tilde{S}_n$ est la somme des n variables aléatoires $(X_k - p\tau_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ qui sont i.i.d. et centrées... Lorsque $p > \alpha$, on a clairement $\lim_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = -\infty$ p.s. On raisonne ensuite par l'absurde. On introduit le temps d'arrêt $\tau_1 = \inf\{n > 0 : \tilde{S}_n > c\}$ qui est fini p.s. La marche aléatoire $(\tilde{S}_{n+\tau_1} - S_{\tau_1})_{n\geqslant 0}$ est de même loi que $(\tilde{S}_n)_{n\geqslant 0}$. Par conséquent, le temps d'arrêt $\tau_2 = \inf\{n > 0 : \tilde{S}_{n+\tau_1} - S_{\tau_1} > c\}$ est lui aussi fini p.s. En itérant le procédé, on montre que $\limsup_{n\to+\infty} \tilde{S}_n \geqslant c$, d'où la contradiction. □

Remarque 2.2. De façon évidente, la compagnie doit s'assurer que $p > \alpha$. La proposition 1.5 permet, à partir d'un historique des sinistres, d'estimer le paramètre α. Ceci fournira des informations sur la façon de choisir p. Sous cette hypothèse, on peut quantifier la probabilité de ruine.

3 Expression générique de la probabilité de ruine

On supposera dans la suite que $p > \alpha$. On considère la perte nette en cas de ruine $Y(c) = \tilde{S}_{\tau(c)} - c$: c'est le découvert de la compagnie à l'instant de ruine. Comme le montre le résultat suivant, la probabilité de ruine s'exprime en fonction de la transformée de Laplace de $Y(c)$ définie par $H(x) = \mathbb{E}(e^{xX_1})$.

Théorème 3.1. *Supposons que la transformée de Laplace de ν vérifie la propriété suivante : il existe $u > 0$ tel que $H(u) - pu/\mu - 1 = 0$. Alors*

$$\psi(c) = \frac{e^{-uc}}{\mathbb{E}[e^{uY(c)}|\tau(c) < +\infty]}.$$

Démonstration. Si un tel réel u existe, alors $(e^{u\tilde{S}_n})_{n\geqslant 0}$ est une martingale. En particulier, pour tout $n \geqslant 0$, $E[e^{u\tilde{S}_n}] = 1$. Soit $n > 0$, alors $\tau(c) \wedge n$ est un temps d'arrêt borné et

$$1 = \mathbb{E}\Big(e^{u\tilde{S}_{\tau(c)\wedge n}}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{u\tilde{S}_{\tau(c)}}\mathbf{1}_{\{\tau(c)<n\}}\Big) + \mathbb{E}\Big(e^{u\tilde{S}_n}\mathbf{1}_{\{\tau(c)\geqslant n\}}\Big).$$

Par convergence dominée (sur $\{\tau(c) \geqslant n\}$, on a $S_n \leqslant c$), la seconde espérance converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par conséquent,

$$1 = \mathbb{E}\Big(e^{u\tilde{S}_{\tau(c)}}\mathbf{1}_{\{\tau(c)<+\infty\}}\Big) = e^{uc}\mathbb{E}\big(e^{uY(c)}|\tau(c) < +\infty\big)\mathbb{P}(\tau(c) < +\infty),$$

ce qui fournit le résultat annoncé. □

Remarque 3.2. Comme conséquence directe du théorème, on a $\psi(c) \leqslant e^{-uc}$.

Remarque 3.3. Puisque H est convexe, la condition sur H dans le théorème 3.1 est satisfaite dès qu'il existe $u^* \in]0, +\infty]$ tel que H soit finie sur $[0, u^*[$ et $\lim_{u\to u^*} H(u) = +\infty$.

4 Cas où les sinistres suivent une loi exponentielle

On suppose dans cette partie que les coûts des sinistres $(X_k)_{k\geqslant 1}$ sont des variables indépendantes, de même loi exponentielle d'espérance λ. Dans ces conditions, on connait la loi de la perte nette en cas de ruine :

Lemme 4.1. *Sachant que $\tau(c) < +\infty$, la variable $Y(c) = S_{\tau(c)} - c$ suit la loi exponentielle d'espérance λ.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'indépendance des $(X_n)_n$ et les propriétés de la loi exponentielle, on obtient le résultat :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y(c) > y|\tau(c) = n, S_{\tau(c)-1} = x, T_{\tau(c)} - T_{\tau(c)-1} = t)\\
&\quad = \mathbb{P}(S_n > y + c|S_0 < c, \cdots, S_{n-1} < c, S_n > c, S_{n-1} = x, T_n - T_{n-1} = t)\\
&\quad = \mathbb{P}(X_n > y + c - x + pt|S_0 < c, \cdots, S_{n-1} < c, S_{n-1} = x, T_n - T_{n-1} = t, X_n > c - x + pt)\\
&\quad = \mathbb{P}(X_n > y + c - x + pt|X_n > c - x + pt)\\
&\quad = \mathbb{P}(X_n > y) = e^{-\lambda y},
\end{aligned}
$$

ce qui assure le résultat annoncé. □

On déduit facilement du théorème 3.1 et du lemme 4.1, l'expression de la probabilité de ruine lorsque les sinistres suivent la loi exponentielle d'espérance λ :

Théorème 4.2. *Pour tout $c \geqslant 0$, on a*

$$\psi(c) = \frac{\lambda\mu}{p} \exp\left(-\frac{p - \lambda\mu}{p\lambda} c\right).$$

5 Mutualisation des risques

On souhaite à présent déterminer si deux personnes désireuses d'investir dans une compagnie d'assurance ont intérêt à mettre leurs mises de départ en commun ou au contraire à fonder deux compagnies différentes.

Le théorème 4.2 permet de vérifier, dans un cas particulier, que les assureurs ont intérêt à se regrouper pour mutualiser les risques.

Dans le cas général, les simulations suggèrent aussi que la mutualisation du risque est une bonne idée...

6 Suggestions

On admettra les Propriétes 1.2 sur le processus de Poisson. Pour traiter le sujet, on suggère de répondre à certaines des questions suivantes :

1. Commenter les hypothèses du modèle. Sont-elles réalistes ?

2. Quelle est l'évolution en temps de R_t ?
3. Que représentent les variables S_t et $\tau(c)$? Simuler une trajectoire de $\tilde{S}_n$.
4. Regarder les preuves des propositions 1.5 et 2.1.
5. Démontrer les théorèmes 3.1 et 4.2.
6. Implémenter un algorithme de simulation afin d'observer l'évolution en c de la probabilité de ruine. Vérifier numériquement la décroissance exponentielle du théorème 4.2.
7. On pourra développer les idées ébauchées dans la section 5.

