

## Chapitre 5 : Équations différentielles linéaires

### Équations sans second membre

**Exercice 5.1.** En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

$$(a) 3y' = -y \quad (b) y' + y \sin x = 0 \quad (c) y' - \frac{y}{\tan x} = 0$$

Pour (c) : Existe-t-il une solution sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 5.2.** En précisant sur quel intervalle, résoudre l'équation différentielle  $(x^2 - 1)y' + xy = 0$  avec condition initiale :

$$(a) y(2) = 1; \quad (b) y(-2) = -3; \quad (c) y(0) = 2$$

### Équations avec second membre

**Exercice 5.3.** En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

- (a)  $y'(1 + x^3) + x^2y = x^2$ . (Indication : On cherchera une solution particulière évidente.)  
(b)  $xy' + y - \sin x = 0$ . (Indication : On utilisera la méthode de la "variation de la constante" pour trouver une solution particulière.)  
(c)  $y' = 2y + x^3$ . (Indication : On pourra chercher une solution particulière de la forme  $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .)  
(d)  $y' \cos x - y \sin x = 1; y(0) = 2$ . (Indication : On utilisera la méthode de la "variation de la constante" pour trouver une solution particulière.)

**Exercice 5.4.** En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

- (a)  $y' - y = e^x - 1, \quad y(1) = 2$ ;  
(b)  $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(1) = 1$ ;  
(c)  $y' - y \tanh x = x \cosh^2 x, \quad y(0) = 2$ ;

## COMPLÉMENTS

### Exercice 5.5.

- (a) Trouver une primitive de la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto te^{-t}$ .
- (b) Trouver une primitive de la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cos(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)}$ .
- (c) Trouver toutes les solutions de l'équation :

$$y' + \sin(x) \cdot y = \cos(x) \cdot \sin(x).$$

### Exercice 5.6.

- (a) Résoudre sur  $]-1,1[$  l'équation différentielle

$$\sqrt{1-x^2} y' - y = 0.$$

- (b) Déterminer sur  $]-1,1[$

$$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

(*On pourra utiliser un changement de variables.*)

- (c) Résoudre sur  $]-1,1[$  l'équation différentielle

$$\sqrt{1-x^2} y' - y = e^{2\arcsin x}.$$

### Exercice 5.7.

- (a) Résoudre sur  $]0,\infty[$  l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = 0.$$

- (b) Déterminer sur  $]0,\infty[$

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$$

(*On pourrait utiliser un changement de variables.*)

- (c) Résoudre sur  $]0,\infty[$  l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = e^{\frac{2}{x}}.$$

## Recollement

### Exercice 5.8. (a) Résoudre l'équation différentielle $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$ sur $]-\infty, -1[$

et sur  $]-1, +\infty[$ .

- (b) Existe-t-il des solutions sur  $\mathbb{R}$  ?