Chapitre 4 : Inégrales et primitives

Exercice 4.1. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-2|\, dx$.

Exercice 4.2. Soit f la fonction définie sur [0,3] par $f(x) := \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$.

1. Calculer $\int_0^3 f(t)dt$. Si $x \in [0,3]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
2. Montrer que F est continue sur [0,3]. La fonction F est-elle dérivable sur [0,3] ?

Exercice 4.3. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes.

(a) $3x^2 + 4x - 2$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ (c) e^{2x+3} (d) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$; (e) $\cos^2(x)$; (f) $\sin(2x)\sin(5x)$.

Exercice 4.4. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \cdot e^x\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e x \cdot (\ln(x))^2\, dx$ (c) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\, dx$.

Exercice 4.5. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $\arctan(x)$ (b) $e^x \sin(x)$ (c) $\ln(x)$.

Exercice 4.6. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_3^4 x(x^2-6)^{\frac{4}{3}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^7(x)\, dx$ (c) $\displaystyle\int_2^3 x \cdot \exp(x^2-2)\, dx$.

Exercice 4.7. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \exp(x^3)\, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cdot \cos^2(x)\, \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sqrt{\sin(x)}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 4.8. Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1} x \cdot \arctan(x)\ dx \quad \text{(b)} \int_{0}^{1} \arccos(x)\ dx \quad \text{(c)} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4.9. Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$a) \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad b) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}.$$

Exercice 4.10. Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

$$a) \lim_{x\to 0^+} \int_{-x}^{x} \sin t^2 dt \qquad b) \lim_{x\to+\infty} \int_{x}^{2x} \frac{dt}{\ln t}.$$

Exercice 4.11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \text{cst}$. Montrer que f est périodique.

Exercice 4.12. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $M = \sup\{|f'(x)|, x \in [a,b]\}$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

Dans quel cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

COMPLÉMENTS

Exercice 4.13. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (3x-2)\ dx$; (b) $\displaystyle\int_{-4}^{3} |(|x-2|-|x+2|)|\ dx$.

Exercice 4.14. Calculer les intégrales ci-dessous.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sinh(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(2x)\ dx$.

Exercice 4.15. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $x^2 \cdot \cos(x)$ (b) $x \cdot \cos^2(x)$ (c) $(x+1)\cdot e^x \cdot \ln(x)$ (d) $\sqrt{3x-1}$ (e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Exercice 4.16. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes

(a) $(x^2+1)\sqrt[3]{x^3+3x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{4+x^6}$ (c) $2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(2x)}$.

Exercice 4.17. Soit

$$I_n := \int_1^e x\cdot(\ln(x))^n\ dx.$$

Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. Puis calculer $\displaystyle\int_1^e x\cdot(\ln(x))^4\ dx$.

Exercice 4.18. Soit

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dx.$$

En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x)\cdot\cos^{n-1}(x)$, démontrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x)\ dx$.

Exercice 4.19. Calculer l'intégrale

$$I_3 = \int_0^1 x^3 e^{2x}\ dx.$$

Exercice 4.20. Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On admet que l'intégrale converge.

(a) Etablir que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(b) Calculer $\Gamma(4)$. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour un entier naturel n.

(c) Sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, déterminer les valeurs de $\Gamma(\frac{3}{2})$ et de $\Gamma(\frac{7}{2})$.

Exercice 4.21.

1. Soit f une fonction continue sur un intervale I, F une primitive de f et $t \in I \mapsto a(t)$ et $t \in I \mapsto b(t)$ deux fonctions dérivables. On consudère la fonction suivante :

$$\forall t \in I, \quad G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx$$

Montrer que

$$G'(t) = f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t).$$

Indication : Utiliser $G(t) = F(b(t)) - F(a(t))$.

2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{t^2}^{t^3} e^x \; dx.$$

(a) Intégrer d'abord, puis dériver.

(b) Utiliser la formule pour la dérivée.

Exercice 4.22.

Soit $f : \; [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive ; on pose $M = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} = M.$$