Université de Rennes 1 — Année 2016-2017
UFR Mathématiques — MIEE L1, Module AN1

Chapitre 3 : Étude de fonctions II

Dérivabilité : définition, domaine de dérivabilité

Exercice 3.1. Utiliser la définition de la dérivée comme limite pour montrer l'existence et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$(a)\, x \mapsto x^3,\ \ (b)\, x \mapsto \sqrt{x},\ \ (c)\, x \mapsto x^{-1},\ \ (d)\, x \mapsto \cos x,\ \ (e)\, x \mapsto \tan x.$$

Exercice 3.2. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$(a)\, x \mapsto xe^{\frac{1}{x}},\ \ (b)\, x \mapsto e^x \sin x,\ \ (c)\, x \mapsto \frac{e^x \ln(x)}{x^2+2x^3},\, (d)\, x \mapsto \frac{x^2+2x}{x^2-1},\ \ (e)\, x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}$$

i) déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction,

ii) utiliser les résultats concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée pour calculer la dérivée en tout point du domaine de dérivabilité.

Exercice 3.3. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$(a)\, f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \ \text{ si } x \neq 0,\, f(0)=0, \quad (b)\, g(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \ \text{ si } x \neq 1,\, g(1) = 1.$$

Exercice 3.4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que f ainsi prolongée est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 3.5. Déterminer a, $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Calcul des limites, règle de l'Hôpital, asymptotes

Exercice 3.6. Calculer les limites suivantes au besoin à l'aide de la règle de l'Hôpital :

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right),\ (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}},\ (c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right).$$

Exercice 3.7. Utiliser la définition des dérivées pour calculer les limites suivantes :

$$(a)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x-1},\quad (b)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1},\quad (c)\quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right).$$

Exercice 3.8. Calculer les limites suivantes. Dans chaque cas, étudier l'existence d'une asymptote.

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+2x^2+1}{2x^4-3x^3+x}, \quad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-\sin(x)+1}{2e^x+\cos(x)-3}, \quad (c) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{|2x-5|}{3x+1}.$$

Exercice 3.9. Etudier l'existence d'une asymptote pour chacune des fonctions suivantes :

$$(a) \quad f_1(x) = x^2+3x, \quad (b) \quad f_2(x) = xe^{\frac{1}{x}}, \quad (c) \quad f_6(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}.$$

Inégalités

Exercice 3.10. Montrer que $\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 3.11. Soit $f(x) = |x^2-4|$.

a) Déterminer les points critiques de f.

b) Déterminer les minima, maxima locaux et globaux de f.

Exercice 3.12. Pour chacune des fonctions suivantes, et leurs domaines de définition respectifs, déterminer les minima, maxima locaux et globaux quand ils existent.

$$(a) \quad (x^2-1)^2, \quad (b) \quad x^2+2x-3, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Accroissements finis, théorème de Rolle, graphe de fonction

Exercice 3.13.

a) Appliquer le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln(x)$ sur $[n,n+1]$ pour montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

b) Retrouver le résultat en utilisant la monotonie de $f : x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 3.14. Soit a, $b \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide du théorème de Rolle, montrer que le polynôme

$$P(X) = X^n + aX + b$$

admet au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 3.15. Etudier les variations et tracer le graphe des fonctions suivantes.

$$(a) \quad f_1(x) = \frac{x}{\ln(x)}, \quad (b) \quad f_2(x) = \ln(\cosh(x)), \quad (c) \quad f_3(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

Fonctions réciproques

Exercice 3.16. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$(a) \quad f(x) = \sinh(x), \quad (b) \quad g(x) = \quad \cosh(x), \quad (c) \quad h(x) = e^{x^2}.$$

a) montrer qu'il exite une restriction à un sous-domaine de son domaine de définition qui admet une réciproque continue ;

b) étudier la dérivabilité de cette réciproque et déterminer la dérivée quand elle existe.

COMPLÉMENTS

Dérivabilité : définition, domaine de dérivabilité

Exercice 3.17. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$(a)\, x \mapsto \cosh(x \ln(x)),\ \ (b)\, x \mapsto \sqrt{x+e^x},\ \ (c)\, x \mapsto \ln(\ln((x)),$$

$$(d)\, x \mapsto \cos(\sqrt{x}),\ \ (e)\, x \mapsto \ln(x \sin(x)),\ \ (f)\, x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}$$

i) déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction,

ii) utiliser les résultats concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée pour calculer la dérivée en tout point du domaine de dérivabilité.

Exercice 3.18. Étudier la dérivabilité de la fonction suivante :

$$h(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad h(0) = 0$$

Calcul des limites, règle de l'Hôpital, asymptotes

Exercice 3.19. Calculer les limites suivantes au besoin à l'aide de la règle de l'Hôpital :

$$(a) \ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2}\right), \ (b) \ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right), \ (c) \ \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^3}{x - \tan(x)}.$$

Exercice 3.20. Utiliser la définition des dérivées pour calculer les limites suivantes :

$$(a) \quad \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}, \quad (b) \quad \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{5+x}-2}.$$

Exercice 3.21. Calculer les limites suivantes. Dans chaque cas, étudier l'existence d'une asymptote.

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-1}, \quad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-x-1}{2x+3}, \quad (c) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+\cos(x)^2}{2x^2-\sin(2x)^2}.$$

Exercice 3.22. Etudier l'existence d'une asymptote pour chacune des fonctions suivantes :

$$(a) \quad f_3(x) = \ln(\sinh(x)^2 - \sinh(x)+1), \quad (b) \quad f_4(x) = x^2 \sin(x), \quad (c) \quad f_5(x) = 2x + \sin(x).$$

Inégalités

Exercice 3.23. Montrer que $\forall x \geq 0, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$

Exercice 3.24. Pour chacune des fonctions suivantes et leurs domaines de définition respectifs, déterminer les minima, maxima locaux et globaux quand ils existent.

$$(a) \quad x^2 e^{-x^2}, \quad (b) \quad \frac{2x+1}{x^2+2}, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

Accroissements finis, théorème de Rolle, graphe de fonction

Exercice 3.25. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(t) = e^t - 1 - t - \frac{\lambda}{2}t^2$$

a) Déterminer $g_\lambda = f'_\lambda$ en tout point où f_λ est dérivable.

b) Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g'_\lambda(x) = 0$. On note λ_x cette valeur de λ. Exprimer λ_x en fonction de x. On note désormais $f = f_{\lambda_x}$ et $g = g_{\lambda_x}$.

c) A l'aide du théorème de Rolle appliqué successivement à f et g, montrer qu'il existe des réels a_x et b_x tels que

$$0 < b_x < a_x < x \quad \text{et} \quad f(x) = x\, a_x\, g'(b_x).$$

d) On pose $h = g'$. Donner l'expression de h' là où h est dérivable.

e) À l'aide du théorème de Rolle appliqué à h, montrer qu'il existe un réel c_x tel que

$$0 < b_x < c_x < x \quad \text{et} \quad f(x) = xa_x(b_x - x)e^{c_x}.$$

f) Montrer que les résultats des questions (b) à (e) restent vrais lorsque $x < 0$.

g) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}.$$

Exercice 3.26. Etudier les variations et tracer le graphe des fonctions suivantes.

$$(a) \quad f_4(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \quad (b) \quad f_5(x) = \sinh\left(\frac{1}{x}\right).$$

Fonctions réciproques

Exercice 3.27. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}.$$

a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Trouver un sous-domaine $D \subset D_f$ tel que f soit une bijection de D sur $f(D)$.

c) Utiliser un théorème du cours pour montrer, sans calculs, que f admet une fonction réciproque définie sur un domaine de définition à déterminer. Quelle est l'image de f^{-1} ?

d) L'application f^{-1} est-elle continue sur son domaine de définition ? Sur un sous-ensemble de son domaine de définition ?

e) Tracer f et sa réciproque f^{-1} dans un même repère.

f) Trouver par le calcul l'expression de f^{-1}. Retrouver les résultats précédents.

Exercice 3.28. Simplifier les expressions suivantes.

$$(a) \quad \cos(\arcsin(x)), \quad \sin(\arcsin(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (b) \quad \arcsin(\sin(x)), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(c) \quad \arcsin(\sin(x)), \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad (d) \quad \arcsin(\sin(x)), \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right],$$