Chapitre 2 : Étude de fonctions I

Généralités sur les fonctions

Exercice 2.1. Trouver le domaine de définition des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\sqrt{x^2-3x-4}$ (b) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}$ (c) $\tan(2x)$.

Exercice 2.2. Parmi les fonctions définies par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?
(a) $5x^4-3x^2$, (b) $2x^4-x^3+1$, (c) $\cos(x^3)$, (d) $\sin(x^5+x)$, (e) $\mathrm{e}^{|x|}$.

Exercice 2.3. (a) Montrer que le graphe de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x)=x^2+2x+3$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=-1$.
(b) Montrer que le graphe de la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par la formule $g(x)=x^3-3x^2+3x-6$ est symétrique par rapport au point $M(1,-5)$.

Exercice 2.4. Résoudre les équations et les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $|2x-5|=4$, (b) $|2x+4|<3$, (c) $|x^2-2x-5|\geq 2$.

Rappels sur les suites

Exercice 2.5. Étudier chacune des suites (u_n) définies ci-dessous, et déterminer lesquelles sont (a) bornées, (b) positives ou négatives, (c) croissantes, décroissantes, (d) convergentes, non convergentes, divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$.
(a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{2n}{n^2+1}$, (b) $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $u_n=4-\dfrac{(-1)^n}{n}$, (c) $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $u_n=\dfrac{\sin n}{n}$.

Exercice 2.6. Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ci-dessous, compléter la définition le cas échéant pour que l'expression proposée ait un sens, étudier la convergence de la suite et déterminer sa limite lorsqu'elle est convergente.
(a) $\forall n\in ?$, $u_n=n-\sqrt{n^2-4n}$, (b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}$, (c) $\forall n\in ?$, $u_n=\dfrac{n}{\ln(n+1)}$.

Exercice 2.7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_1=1$ et pour chaque entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{1+2u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (on montrera par récurrence que cette suite est majorée par 3). En déduire qu'elle est convergente.

Limites

Exercice 2.8. Montrer l'existence des limites suivantes et évaluez-les :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} |x|\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(2x+1)^3-8(x-3)^3}{x^2}$, (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+2e^x)-x$, (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2+x\sin x$.

Exercice 2.9. Etudier les limites à gauche et à droite au point x_0 indiqué des fonctions définies par les formules suivantes :

(a) $\exp\left(\frac{1}{x}\right)$, $x_0 = 0$ (b) $\exp\left(\frac{|x|}{x}\right)$, $x_0 = 0$ (c) $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$, $x_0 = 1$.

Fonctions continues

Exercice 2.10. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

(a) $f(x) = \sin(x)\,\sin(\frac{1}{x})$, (b) $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

Exercice 2.11. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On définit $I = \{x \in [0,1]; x \le f(x)\}$.

(a) Montrer que I est non vide. Dans la suite, on désigne par $x_0 = \sup I$.
(b) Montrer que $x_0 \in I$. (Indication : utiliser que f est croissante).
(c) En déduire que $f(x_0) = x_0$.
(d) En remplaçant la monotonie par une hypothèse de continuité sur f, montrer que le résultat de (c) reste vrai.

Exercice 2.12. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'elle admet une limite finie b en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 2.13. (a) Chercher toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(x^2).$$

(b) Chercher toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ qui soient continues.

Convergence des suites

Exercice 2.14. Soient a_0 et b_0 deux réels tels que $a_0 < b_0$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{2a_n + b_n}{3}, \\ b_{n+1} &= \dfrac{a_n + 2b_n}{3}. \end{cases}$$

i) Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ son terme d'indice n à l'aide de n, a_0 et b_0.
ii) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
iii) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n$; montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\frac{a_0+b_0}{2}$.

Exercice 2.15. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$ et les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminées par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2}, \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_{n+1}v_n}. \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 2.16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite ℓ. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Limites

Exercice 2.17. Montrer l'existence des limites suivantes et évaluez-les :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\sin(x)-x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)\sin(x)$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

Exercice 2.18. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad \text{et} \quad g(x) = xf(x). \tag{1}$$

(a) Montrer que f n'admet pas de limite en aucun point.
(b) Montrer que g admet une limite seulement en zéro.

Fonctions continues

Exercice 2.19. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction défine par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

(a) Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante.
(b) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad f_n(x_{n+1}) < 0$.
(d) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.
(e) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1.

Exercice 2.20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(a) Montrer que,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x).$$

(b) Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(kx) = kf(x).$$

(c) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(rx) = rf(x).$$

(d) On suppose que f est continue, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax.$$