Université de Rennes 1 — Année 2016-2017
UFR Mathématiques — MIEE L1, Module AN1

Chapitre 1 : Les nombres complexes

Intervalles

Exercice 1.1. Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0{,}3[\cup[3{,}1[\,,\quad [0{,}3[\cup]3{,}1[\,,\quad \mathbb{Z}\,,\quad \mathbb{Q}\,,\quad \{x\in\mathbb{R} : x^4\geq 1\}\quad ?$$

Exercice 1.2. Existe-t-il un intervalle qui ne contient aucun nombre rationnel ?

Exercice 1.3. L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ? Et la réunion ?

Équations du second degré

Exercice 1.4. Trouver les solutions réelles de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

Exercice 1.5. Sans calculer les racines, expliquer pourquoi l'équation $2x^2-3x+1=0$ admet deux racines strictement positives.

Exercice 1.6. Étudier en fonction de x le signe de $-x^2+6x+1$ et de x^2+x+5.

Exercice 1.7. Trouver toutes les solutions réelles de l'équation $-x^4+2x^2+4=0$.

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.8. Donner la forme algébrique des complexes suivants

(a) $z_1 = (2+i)^4$; (b) $z_3 = \dfrac{1-3i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+2i}$.

Exercice 1.9. (a) Donner le module et un argument de $1+i$.
(b) Donner le module et un argument de $(1+i)^5$.
(c) En déduire la forme algébrique de $(1+i)^5$.
(d) Quelle est la forme algébrique de $(1-i)^5$?

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.10. Donner la forme exponentielle de

(a) $z = 1 - i\sqrt{3}$; (b) $z = -\sqrt{3}+i$; (c) $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $z = \dfrac{2}{1-i}$;

Exercice 1.11. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes
(a) $(4+4i)^2$ (b) $(4+4i)(1-i\sqrt{3})$ (c) $\dfrac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 1.12. (Extrait du Contrôle continu du 30-10-2009)

(a) Donner la forme exponentielle de $1+i$ et de $i-1$.

(b) Donner la forme exponentielle de $z = \frac{(1+i)^{19}}{(i-1)^{11}}$.

(c) Donner la forme algébrique de z.

Représentation graphique

Exercice 1.13. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M, d'affixe z tel que

(a) $z=-2$, (b) $z=5i$, (c) $z=2+2i$, (d) $z=2-2i$, (e) $z=-2-2i$,

et en déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 1.14. (Extrait du contrôle continu 10 du 26/11/2008)
Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $\dfrac{1}{z}$ et de $-z$.

(b) Représenter dans le même graphique les points d'affixe z, $\bar{z}$, $-z$, iz et $\dfrac{1}{z}$

Exercice 1.15. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

(a) $|z|=2$ (b) $\mathrm{Re}(z)=-1$ (c) $|z|=2$ et $\arg(z) \in [\dfrac{9\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{4}]$ (d) $|z|=2$ et $\mathrm{Im}(z)=1$

Exercice 1.16. Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ ont le même module ?

Exercice 1.17. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

(a) $|z-1| = |z-3-2i|$ (b) $|z-3| = |z-1-i|$ (c) $|z-2+i| = \sqrt{5}$

(d) $|(1+i)z-2-i| = 2$ (e) $|z+3-i| \leqslant 2$ (f) $|z+3-i| > |z|$

(g) $|z| < |z+3-i| < 2$

Linéarisation

Exercice 1.18. Linéariser :

(a) $\cos^5 x$; (b) $\cos^2(3x)\sin^2(5x)$.

Racines carrées

Exercice 1.19. Déterminer les racines carrées de $z = 1 + i\sqrt{3}$ de deux manières différentes :

(a) sous forme algébrique ;

(b) sous forme exponentielle après avoir cherché la forme exponentielle de z.

Exercice 1.20. Déterminer les racines carrées de

(a) $2+6i$; (b) $1+4\sqrt{5}i$.

Équations du second degré

Exercice 1.21. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $(z-2-i)(z-3+i)=0$ (b) $2z^2-6z+5=0$ (c) $5z^2+(9-7i)z+2-6i=0$
(d) $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$

Cacul de racines n-ièmes

Exercice 1.22.
(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$.
(b) Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe.
(c) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

COMPLÉMENTS

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.23. Pour tout complexe z, on pose

$$P(z)=z^3+(-4+i)z^2+(13-4i)z+13i$$

Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.24. Donner la forme exponentielle de chaque complexe proposé.
(a) $z_1=\sqrt{3}+3i$ (b) $z_2=(\sqrt{3}-2)e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 1.25. (a) Déterminer la forme exponentielle de $\sqrt{3}-i$ et de $-1+i$.
(b) Déteminer la forme exponentielle de

$$z=\frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+i)^{18}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Exercice 1.26. Sachant que

$$e^{\frac{i\pi}{12}}=\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}},$$

calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 1.27. Calculer les deux complexes :
(a) $z_1=(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$
(b) $z_2=(1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$
Indication : pour (a) En posant $z=1+i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1=2\,\mathrm{Re}(z^5)$.

Représentation graphique

Exercice 1.28. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) $-1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2$. (b) $\dfrac{1}{2} \leq |z - i| \leq 3$.

(c) $|z| = 3$ et $\operatorname{Re}(z) > 0$. (d) $z = (1 + i)w$ où $|w| = 1$ et $\operatorname{Im}(w) > 0$.

Linéarisation

Exercice 1.29. Linériser $\cos^2 x \sin^4 x$.

Équations du second degré

Exercice 1.30. Résoudre dans $\mathbb{C}$

(a) $5z^2 + (9 - 7i)z + 2 - 6i = 0$

(b) $z^2 + (2 + i)z - 1 + 7i = 0$ (On rappelle que $\sqrt{625} = 25$.)

Cacul de racines n-ièmes

Exercice 1.31. (Extrait du Contrôle continu du 30-10-2009)
Donner sous forme exponentielle les racines huitièmes de $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.32. Déterminer graphiquement les racines quatrièmes de $e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Nombres complexes et géométrie

Autres exercices

Exercice 1.33. Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ?