

Analyse des processus stochastiques : devoir maison no. 3

- à rendre pour le 30 mars 2015 -

Exercice I.

1. Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien d -dimensionnel et soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ la solution de l'eds $dX_t = \sqrt{2}dB_t - X_t dt$, $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$. Expliciter X_t et trouver sa loi.
2. On note γ_d la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0, I)$. On pose $T_t f(x) = E_x[f(X_t)]$. Montrer que $T_t f(x) = E[f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)]$, où $Y \sim \gamma_d$.
3. Montrer que $(T_t : t \geq 0)$ est un semigroupe de contractions sur $L^p(\mathbb{R}, \gamma_d)$. Vérifier que T_t est symétrique sur $L^2(\mathbb{R}, \gamma_d)$, c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \gamma_d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_t f(x)g(x)\gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)T_t g(x)\gamma_d(dx).$$

4. Utiliser la formule d'Itô pour montrer que pour toute $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T_t f(x) - f(x)) =: L_d f(x), \quad \text{où } L_d = \Delta - x \cdot \nabla.$$

5. On définit les polynômes d'Hermite, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$ entier par $\exp(-\frac{t^2}{2} + tx) = \sum_{n \geq 0} t^n H_n(x)$. Calculer H_0 et H_1 . Montrer que $E(H_n H_m) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \delta_{nm}$. On pourra, par exemple montrer que $E[\exp(sX - \frac{s^2}{2}) \exp(tX - \frac{t^2}{2})] = \exp(st)$. En déduire que $(\sqrt{n!}H_n : n \geq 0)$ est un système orthonormal complet de $L^2(\mathbb{R}, \gamma_1)$.
6. Vérifier $H'_n(x) = H_{n-1}(x)$ et $(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H'_n(x)$. En déduire que $L_1 H_n(x) = -nH_n(x)$, autrement dit H_n est un vecteur propre de L_1 avec valeur propre $-n$.
7. Soit $a = (a_1, \dots, a_d)$ et on pose $|a| = a_1 + \dots + a_d$. On voit que $L_d = \sum_{j=1}^d L_1^j$, où $L_1^j = \partial_{x_j x_j}^2 - x_j \partial_{x_j}$. Enfin on pose $H_a(x) = \prod_{j=1}^d H_{a_j}(x_j)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que $L_d H_a(x) = -|a|H_a(x)$.
8. On note \mathcal{P}_d l'ensemble des polynômes sur \mathbb{R}^d . On cherche un opérateur δ_d qui joue le rôle d'adjoint du gradient ∇ dans $L^2(\mathbb{R}, \gamma_d)$. Autrement dit il devrait satisfaire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(x) \cdot \varphi(x) \gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \delta_d \varphi(x) \gamma_d(dx), \quad \text{où } \varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Montrer que $\delta_d \varphi = \sum_{j=1}^d (x_j \varphi^j - \partial_j \varphi^j)$. En déduire que $\delta_d \circ \nabla = -L_d$.

9. Prouver que pour toutes $f, g \in \mathcal{P}_d$ $\delta_d(f \nabla g) = -\nabla f \cdot \nabla g - f L_d g$, $\forall f, g \in \mathcal{P}_d$ et que $\delta_1 H_n(x) = (n+1)H_{n+1}(x)$.
10. Pour $f, g \in \mathcal{P}_d$ on pose $\Gamma(f, g) := L_d(f, g) - f L_d g - g L_d f$.
Montrer que $\Gamma(f, g) = 2 \nabla f \cdot \nabla g$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(f, g)(x) \gamma_d(dx) = - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) L_d g(x) \gamma_d(dx).$$

11. Montrer que $T_t H_n = e^{-nt} H_n$. On pourra utiliser la définition de T_t et l'expression de la transformée de Laplace de γ_1 pour vérifier que $T_t(\exp(-\frac{t^2}{2} + tx)) = \exp(-\frac{(te^{-t})^2}{2} + te^{-t}x)$.

12. Soit $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction régulière (si on munit \mathbb{R}^d de la mesure gaussienne γ_d on peut regarder F comme un vecteur aléatoire). On appelle *matrice de Malliavin* la matrice

$$A(x) = (\nabla F^i(x) \cdot \nabla F^j(x))_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Supposons que $A(x)$ est inversible pour γ_d -presque tous $x \in \mathbb{R}^d$ et que

$$\det A^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^d, \gamma_d) \quad \text{et} \quad \nabla(\det A^{-1}) \in L^2(\mathbb{R}^d, \gamma_d).$$

Montrer que :

- (a) pour toute $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, pour chaque $\ell = 1, \dots, d$ on a

$$\nabla(\varphi(F(x))) \cdot \nabla F^\ell(x) = (A(x)(\nabla^T \varphi)(F(x)))_\ell$$

et déduire $(\partial_i \varphi)(F) = \nabla(\varphi(F(x))) \cdot A_{i,\ell}^{-1} \nabla F^\ell$;

- (b) pour toute $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, pour chaque $i = 1, \dots, d$ on a une formule d'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i \varphi)(F) d\gamma_d = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(F) H_i(F, 1) d\gamma_d,$$

où $H_i(F, 1) = - \sum_{\ell=1}^d (\nabla A_{i,\ell}^{-1} \cdot \nabla F^\ell + A_{i,\ell}^{-1} L_d F^\ell)$.

Exercice II.

Soit $g \in L^2([0, 1])$. Notons $\|g\| := \sqrt{\int_0^1 g(s)^2 ds}$ et $W(g) := \int_0^1 g(s) dB_s$, où $B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ est le mouvement brownien standard.

1. Montrer que la projection sur le n -ième chaos de Wiener de la variable aléatoire $G = \exp(W(g) - \frac{\|g\|^2}{2})$ est $\|g\|^n H_n\left(\frac{W(g)}{\|g\|}\right)$, où H_n est le n -ième polynôme de Hermite.
2. Déduire le développement en chaos de Wiener de $F = \exp(W(g))$.
3. Utiliser le résultat du point précédent pour calculer la dérivée de Malliavin $D_t F$ de F . Retrouver le résultat en utilisant la formule de dérivée composée. Que vaut $D_t \exp(B_1)$?
4. Vérifier "à la main" la formule de Clark-Ocone pour la variable aléatoire $\exp(B_1)$.
5. Vérifier l'égalité

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(s) dB_s \right) \delta B_t = B_1 \left(\int_0^1 g(t) dB_t \right) - \int_0^1 g(t) dt.$$

6. Écrire la décomposition en chaos de Wiener de la variable aléatoire $U = \int_0^1 g(s) B_s ds$. On pourra montrer que $U = I_1(f_1)$ pour une fonction $f_1 \in L^2([0, 1])$ à préciser. En déduire la valeur de l'intégrale de Skorokhod $\int_0^1 U \delta B_t$.