Analyse des processus stochastiques : devoir maison no. 2

- à rendre pour le **17 mars 2015** -

Exercice I.

Soit $(E, \mathcal{B}(E))$ un espace métrique polonais muni de sa tribu borélienne. Considérons $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités satisfaisant un principe de grandes déviations avec une bonne fonctionnelle de taux I. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_{\{F>M\}} e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon = -\infty.$$

1. Montrer que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_C e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \leqslant \sup_C (F - I), \qquad \text{pour } C \subset E \text{ fermé}$$

et

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_O e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \geqslant \sup_O (F - I), \qquad \text{pour } O \subset E \text{ ouvert.}$$

Que vaut $\lim\limits_{M\to\infty} \inf\{I(x) - F(x) : x \in E \text{ tel que } F(x) > M\}$?

2. On introduit la famille de mesures, définies par

$$Q_F^\varepsilon(A) := \frac{1}{Z_F^\varepsilon} \int_A e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon,\ \forall A \in \mathcal{B}(E),\ \varepsilon > 0,$$

où Z_F^ε sont des constantes.

(a) Pour quel choix des constantes Z_F^ε les mesures Q_F^ε sont des probabilités ? On conservera ce choix pour la suite de l'exercice. Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log Z_F^\varepsilon$.

(b) Montrer que la famille de probabilités $\{Q_F^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle de taux

$$I_F(x) := \sup_E (F - I) - (F(x) - I(x)),\ x \in E.$$

(c) Prouver que I_F est une bonne fonctionnelle de taux. Considérer deux situations : F majorée ou non. Lorsque F n'est pas majorée, on pourra prendre une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ dans un ensemble de niveau de I_F et on pourra étudier les deux cas, $\sup_{n\geqslant 1} F(x_n) < \infty$ ou $= \infty$, en utilisant le fait que I est une bonne fonctionnelle de taux.

Exercice II.

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ et on désigne par Λ et $\Lambda^\star$ respectivement, les transformées de log-Laplace et de Cramer associées à μ.

1. Soit $\alpha \in (0,1)$, on suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x|\mu(dx) < \infty$ et on note $m := \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)$ Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha\Lambda^\star(x)} \mu(dx) \leqslant \frac{2}{1-\alpha}.$$

On pourra montrer que si $y \geqslant m$ et $\Lambda^\star(y) < \infty$, alors $\int_{[m,y]} e^{\alpha\Lambda^\star(x)}\mu(dx) \leqslant (1-\alpha)^{-1}$ et que si $y \leqslant m$ et $\Lambda^\star(y) < \infty$, alors $\int_{[y,m]} e^{\alpha\Lambda^\star(x)}\mu(dx) \leqslant (1-\alpha)^{-1}$.

2. Supposons cette fois que $\Lambda(\lambda) < \infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et notons encore une fois $m := \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)$. Soit P_n la loi de l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + \ldots + x_n)/n$ sous $\mu^{\otimes n}$. Montrer que, lorsque $z \geqslant m$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}_n\big((z,\infty)\big) = -\inf_{y>z} \Lambda^\star(y).$$

On pourra écrire que, pour tout $\delta > 0$, $[z+\delta,\infty) \subset (z,\infty) \subset [z,\infty)$.

Exercice III.

Soit $\{B_t : t \in [0,1]\}$ un mouvement brownien réel issu de 0 et on introduit $\{b_t = B_t - tB_1 : t \in [0,1]\}$ le pont brownien. Pour $\varepsilon > 0$, notons Q^ε la loi du processus $\{\sqrt{\varepsilon}\, b_t : t \in [0,1]\}$.

1. Montrer que la famille de probabilités $\{Q^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations sur $\mathrm{C}_0([0,1];\mathbb{R})$ et trouver la fonction de taux.
2. La limite $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M^2} \log \mathrm{P}(\sup_{t\in[0,1]} b_t \geqslant M)$ existe-t-elle ? Si oui calculer sa valeur. On pourra commencer par étudier la même limite avec B à la place de b.