Analyse des processus stochastiques : devoir maison no. 1

- à rendre pour le **25 février 2015** -

Exercice I.

1. Soit $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de probabilités sur un espace métrique séparable $(E, \mathcal{B}(E))$. Montrer que Q_n converge étroitement vers une probabilité Q si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f\, dQ_n = \int_E f\, dQ, \quad \forall f : E \to \mathbb{R} \text{ uniformément continue et bornée.} \tag{1}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f\, dQ_n = \int_E f\, dQ, \quad \forall f : E \to \mathbb{R} \text{ lipschitzienne et bornée.} \tag{2}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f\, dQ_n = \int_E f\, dQ, \quad \forall f : E \to \mathbb{R} \text{ mesurable, bornée et } Q\text{–p.p. continue.} \tag{3}$$

Exercice II.

Soit $\mathcal{L}$ la famille des fonctions continues sur $f : E \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{x\in E} |f(x)| \leqslant 1 \quad \text{ et } \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{d}(x, y), \forall x, y \in E,$$

où d est la métrique sur E. Définissons

$$d_{\mathcal{L}}(Q, Q') = \sup_{f\in\mathcal{L}} \left| \int_E f\, dQ - \int_E f\, dQ' \right|.$$

1. Montrer que $d_{\mathcal{L}}$ est une métrique sur l'ensemble des mesures de probabilités $\mathcal{M}_1(E)$.
2. Montrer qu'une suite de probabilités Q_n converge étroitement vers une probabilité Q si et seulement si $d_{\mathcal{L}}(Q_n, Q) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice III.

Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique séparable E qui converge en loi vers X.

1. Supposons que $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ est une autre suite de variables aléatoires à valeurs dans E telle que $\mathrm{d}(X_n, Z_n)$ converge vers 0 en probabilité, d étant la métrique de l'espace E. Montrer que Z_n converge en loi vers X.
2. Supposons maintenant que E est un espace vectoriel normé séparable et soit $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de constantes qui converge vers c. Montrer que $c_n X_n$ converge en loi vers cX.

Exercice IV.

Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et pour tout $\kappa > 0$ on a

$$Q(\mathbb{R} \setminus [-\kappa, \kappa]) \leqslant c\kappa \int_{-1/\kappa}^{1/\kappa} (1 - \mathrm{Re}\varphi_{\mathrm{Q}}(\mathrm{t}))\mathrm{dt},$$

où $\varphi_Q(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} Q(dx)$ est la fonction caractéristique de Q.

Exercice V.

Soit $\{B_t\}_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien standard issu de 0 et on considère l'eds suivante

$$dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1-t} dt, \quad 0 < t < 1, \qquad \text{avec} \qquad X_0 = 0.$$

1. Etudier l'existence et l'unicité des solutions pour cette eds. Montrer ensuite que la solution est donnée par

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad t \in [0,1).$$

   En déduire que $\{X_t\}_{t \in [0,1)}$ est un processus gaussien centré et calculer sa covariance.
2. On note $b_t := B_t - tB_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Justifier que $\{b_t\}_{t \in [0,1]}$ est un processus gaussien et calculer son espérance et sa covariance. Que peut-on remarquer ?
3. Soit $\{Y_n\}_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathrm{P}(Y_j = 1) = \mathrm{P}(Y_j = -1) = 1/2$ et on pose $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n)$. On introduit

$$z_n(t) := \Big(S_{[nt]} + (nt - [nt]) Y_{[nt]+1} - tS_n\Big) / \sqrt{n}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

   La loi de z_n, notée Q_n, est une probabilité sur $\mathrm{C}([0,1])$. Montrer que Q_n converge étroitement vers la loi du pont brownien.