Analyse des processus stochastiques : devoir maison no. 4

- à rendre pour le **12 mars 2014** -

Exercice I.

1. Soit F une variable aléatoire telle que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $DF = 0$. Montrer que $F = \mathrm{E}(F)$. On pourra utiliser la décomposition en chaos de Wiener de F.
2. Pour A un événement aléatoire, montrer que $\mathbb{1}_A \in \mathbb{D}^{1,2}$ si et seulement si $\mathrm{P}(A) \in \{0, 1\}$. On pourra introduire une fonction $g \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g(x) = x^2$ si $x \in [0, 1]$, et l'utiliser pour calculer $D\mathbb{1}_A$.
3. Pour quelle fonction $h \in \mathrm{L}^2([0, 1])$ la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{W(h)>0\}}$ appartient à $\mathbb{D}^{1,2}$?

Exercice II.

Soit $g \in \mathrm{L}^2([0, 1])$. Notons $\|g\| := \sqrt{\int_0^1 g(s)^2 ds}$ et $W(g) := \int_0^1 g(s)dB_s$, où $B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ est le mouvement brownien standard.

1. Montrer que la projection sur le n-ième chaos de Wiener de la variable aléatoire $G = \exp\left(W(g) - \frac{\|g\|^2}{2}\right)$ est $\|g\|^n H_n\left(\frac{W(g)}{\|g\|}\right)$, où H_n est le n-ième polynôme de Hermite.
2. Déduire le développement en chaos de Wiener de $F = \exp\Big(W(g)\Big)$.
3. Utiliser le résultat du point précédent pour calculer la dérivée de Malliavin D_tF de F. Retrouver le résultat en utilisant la formule de dérivée composée. Que vaut $D_t \exp(B_1)$?
4. Vérifier "à la main" la formule de Clark-Ocone pour la variable aléatoire $\exp(B_1)$.
5. Vérifier l'égalité
$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 g(s)dB_s\Big)\delta B_t = B_1\Big(\int_0^1 g(t)dB_t\Big) - \int_0^1 g(t)dt.$$
6. Etudier si la variable aléatoire G du premier point appartient au domaine de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck L et si oui calculer LG.
7. Écrire la décomposition en chaos de Wiener de la variable aléatoire $U = \int_0^1 g(s)B_s ds$. On pourra montrer que $U = I_1(f_1)$ pour une fonction $f_\in \mathrm{L}^2([0, 1])$ à préciser.
8. En déduire la valeur de l'intégrale de Skorokhod $\int_0^1 U\,\delta B_t$.

Exercice III.

Soit F une variable aléatoire rélle telle que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ avec $\|DF\| := \|DF\|_{\mathrm{L}^2(\lambda)} \neq 0$ p.s. et telle que $\frac{DF}{\|DF\|^2} \in \mathbb{D}^{1,2}$.

1. Montrer que F admet une densité de probabilité p continue bornée. Donner son expression.
2. En déduire que $p(x) \leqslant \sqrt{\mathrm{P}(F > x)}\,\Big\|\delta(\frac{DF}{\|DF\|^2})\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{P})}$.
3. Montrer qu'on peut remplacer le premier facteur du majorant par $\sqrt{\mathrm{P}(|F| > |x|)}$.