Analyse des processus stochastiques : devoir maison no. 3
- à rendre pour le **17 février 2014** -

Exercice I.

1. Soit $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien d-dimensionnel et soit $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ la solution de l'eds
$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - X_t\,dt, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d.$$
Expliciter X_t et trouver sa loi.
2. On note γ_d la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0, I)$. On pose $T_t f(x) = E_x[f(X_t)]$. Montrer que
$$T_t f(x) = \mathrm{E}[f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)], \qquad \text{où } Y \sim \gamma_d.$$
3. Montrer que $(T_t : t \geqslant 0)$ est un semigroupe de contractions sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}, \gamma_d)$. Vérifier que T_t est symétrique sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \gamma_d)$, c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \gamma_d)$
$$\int_{\mathbb{R}^d} T_t f(x) g(x) \gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) T_t g(x) \gamma_d(dx).$$
4. Utiliser la formule d'Itô pour montrer que pour toute $f \in \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_t f(x) - f(x)) =: L_d f(x), \quad \text{où } L_d = \Delta - x \cdot \nabla.$$
5. On définit les polynômes d'Hermite, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 0$ entier par
$$\exp(-\frac{t^2}{2} + tx) = \sum_{n\geqslant 0} t^n H_n(x).$$
Calculer H_0 et H_1. Montrer que $\mathrm{E}(H_n H_m) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}}\delta_{nm}$. On pourra, par exemple montrer que
$$\mathrm{E}\Big[\exp(sX - \frac{s^2}{2})\exp(tX - \frac{t^2}{2})\Big] = \exp(st).$$
En déduire que $(\sqrt{n!}H_n : n \geqslant 0)$ est un système orthonormal complet de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \gamma_1)$.
6. Vérifier $H_n'(x) = H_{n-1}(x)$ et $(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_n'(x)$. En déduire que $L_1 H_n(x) = -nH_n(x)$, autrement dit H_n est un vecteur propre de L_1 avec valeur propre $-n$.
7. Soit $a = (a_1, \ldots, a_d)$ et on pose $|a| = a_1 + \ldots + a_d$. On voit que $L_d = \sum_{j=1}^d L_1^j$, où $L_1^j = \partial^2_{x_j x_j} - x_j \partial_{x_j}$. Enfin on pose $H_a(x) = \prod_{j=1}^d H_{a_j}(x_j)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que $L_d H_a(x) = -|a|H_a(x)$.
8. On note $\mathcal{P}_d$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}^d$. On cherche un opérateur δ_d qui joue le rôle d'adjoint du gradient ∇ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \gamma_d)$. Autrement dit il devrait satisfaire
$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(x) \cdot \varphi(x) \gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \delta_d \varphi(x) \gamma_d(dx), \quad \text{où } \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.$$
Montrer que $\delta_d \varphi = \sum_{j=1}^d (x_j \varphi^j - \partial_j \varphi^j)$. En déduire que $\delta_d \circ \nabla = -L_d$.
9. Prouver que pour toutes $f, g \in \mathcal{P}_d$
$$\delta_d(f\nabla g) = -\nabla f \cdot \nabla g - f L_d g, \quad \forall f, g \in \mathcal{P}_d$$
et que $\delta_1 H_n(x) = (n+1)H_{n+1}(x)$.

10. Pour $f, g \in \mathcal{P}_d$ on pose $\Gamma(f,g) := L_d(f,g) - fL_dg - gL_df$. Montrer que $\Gamma(f,g) = 2\nabla f \cdot \nabla g$ et
$$\int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(f,g)(x)\gamma_d(dx) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)L_dg(x)\gamma_d(dx).$$
11. Montrer que $T_tH_n = e^{-nt}H_n$. On pourra utiliser la définition de T_t et l'expression de la transformée de Laplace de γ_1 pour vérifier que
$$T_t\Big(\exp(-\frac{t^2}{2} + tx)\Big) = \exp\Big(-\frac{(te^{-t})^2}{2} + te^{-t}x\Big).$$

Exercice II.

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction régulière (si on munit $\mathbb{R}^d$ de la mesure gaussienne γ_d on peut regarder F comme un vecteur aléatoire). On appelle *matrice de Malliavin* la matrice
$$A(x) = (\nabla F^i(x) \cdot \nabla F^j(x))_{1\leqslant i,j\leqslant d}.$$
Supposons que $A(x)$ est inversible pour γ_d-presque tous $x \in \mathbb{R}^d$ et que
$$\det A^{-1} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d), \gamma_d) \quad \text{et} \quad \nabla(\det A^{-1}) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d), \gamma_d).$$
Montrer que :

1. pour toute $\varphi \in \mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, pour chaque $\ell = 1, \dots, d$ on a
$$\nabla\big(\varphi(F(x))\big) \cdot \nabla F^\ell(x) = \big(A(x)(\nabla^T\varphi)(F(x))\big)_\ell$$
et déduire
$$(\partial_i\varphi)(F) = \nabla\big(\varphi(F(x))\big) \cdot A^{-1}_{i,\ell}\nabla F^\ell;$$
2. pour toute $\varphi \in \mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, pour chaque $i = 1, \dots, d$ on a une formule d'intégration par parties
$$\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i\varphi)(F)d\gamma_d = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(F)H_i(F,1)d\gamma_d,$$
où $H_i(F,1) = -\sum_{\ell=1}^d \big(\nabla A^{-1}_{i,\ell} \cdot \nabla F^\ell + A^{-1}_{i,\ell}L_dF^\ell\big)$.
3. pour toute $\varphi \in \mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, pour chaque $i = 1, \dots, d$, il existe une constante c_i telle que
$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i\varphi)(F)d\gamma_d\Big| \leqslant c_i\|\varphi\|.$$

En déduire que la loi F admet une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebsgue (on pourra utiliser le résultat de Maliavin d'absolue continuité).