Analyse des processus stochastiques : devoir maison no. 2
- à rendre pour le **3 février 2014** -

Soit $(E, \mathcal{B}(E))$ un espace métrique polonais muni de sa tribu borélienne. Considérons $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités satisfaisant un principe de grandes déviations avec une bonne fonctionnelle de taux I. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_{\{F>M\}} e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon = -\infty.$$

On introduit la famille de mesures, définies par

$$Q_F^\varepsilon(A) := \frac{1}{Z_F^\varepsilon} \int_A e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon,\ \forall A \in \mathcal{B}(E),\ \varepsilon > 0,$$

où Z_F^ε sont des constantes.

0.a Montrer que
$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_C e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \leqslant \sup_C (F - I), \qquad \text{pour } C \subset E \text{ fermé}$$
et
$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_O e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \geqslant \sup_O (F - I), \qquad \text{pour } O \subset E \text{ ouvert.}$$

0.b Que vaut $\lim\limits_{M\to\infty} \inf\{I(x) - F(x) : x \in E \text{ tel que } F(x) > M\}$?

1. Pour quel choix des constantes Z_F^ε les mesures Q_F^ε sont des probabilités ?
   On conservera ce choix tout au long de l'exercice.
   Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log Z_F^\varepsilon$.
2. Montrer que la famille de probabilités $\{Q_F^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle de taux
$$I_F(x) := \sup_E (F - I) - (F(x) - I(x)),\ x \in E.$$
3. Prouver que I_F est une bonne fonctionnelle de taux. Considérer deux situations : F majorée ou non. Lorsque F n'est pas majorée, on pourra prendre une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ dans un ensemble de niveau de I_F et on pourra étudier les deux cas, $\sup_{n\geqslant 1} F(x_n) < \infty$ ou $= \infty$, en utilisant le fait que I est une bonne fonctionnelle de taux.
4. Soit $C \subset E$ un fermé et notons $I_F(C) := \inf_{x\in C} I_F(x)$.
   (a) Montrer que $Q_F^\varepsilon(C) \leqslant \exp\big(-\dfrac{I_F(C) - \delta}{\varepsilon}\big)$, pour tout $\delta > 0$ et pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.
   (b) Vérifier que si C ne contient pas de minimum de I_F, alors $I_F(C) > 0$. On pourra introduire $C' := C \cap \{x \in E : I_F(x) \leqslant I_F(C) + 1\}$ et vérifier que $I_F(C') = I_F(C)$.
5. On suppose que I_F admet un unique minimum x_0.
   (a) Montrer l'équivalence suivante
$$\Big(Q_F^\varepsilon \to \delta_{x_0},\ \text{étroitement quand } \varepsilon \to 0\Big) \Leftrightarrow \Big(Q_F^\varepsilon(A) \to 0,\ \text{quand } \varepsilon \to 0,\ \forall A \in \mathcal{B}(E) \text{ avec } x_0 \notin \overline{A}\Big).$$
   On pourra d'abord remarquer que $\delta_{x_0}(A^\circ) = \delta_{x_0}(\overline{A}) = 0$, si $x_0 \notin \overline{A}$. Par ailleurs soit $O \ni x_0$ un ouvert et on pourra écrire que, pour toute fonction $f \in C_b(E; \mathbb{R})$,
$$\left| \int_E f dQ_F^\varepsilon - \int_E f d\delta_{x_0} \right| \leqslant \sup_{y\in O} |f(y) - f(x_0)| + 2\|f\|_\infty Q_F^\varepsilon(O^c).$$
   (b) Utiliser le résultat du point 4 pour déduire que $Q_F^\varepsilon \to \delta_{x_0}$ étroitement, quand $\varepsilon \to 0$.