

Analyse des processus stochastiques : devoir maison no. 1

- à rendre pour le 20 janvier 2014 -

Exercice I. Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique séparable E qui converge en loi vers X .

1. Supposons que $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ est une autre suite de variables aléatoires à valeurs dans E telle que $d(X_n, Z_n)$ converge vers 0 en probabilité, d étant la métrique de l'espace E . Montrer que Z_n converge en loi vers X .
2. Supposons maintenant que E est un espace vectoriel normé séparable et soit $\{c_n\}_{n \geq 1}$ une suite de constantes qui converge vers c . Montrer que $c_n X_n$ converge en loi vers cX .

Exercice II.

1. Soit $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ une suite de probabilités sur un espace métrique séparable $(E, \mathcal{B}(E))$. Montrer que Q_n converge étroitement vers une probabilité Q si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f dQ_n = \int_E f dQ, \quad \forall f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ uniformément continue et bornée.}$$

2. Soit \mathcal{L} la famille des fonctions continues sur $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{x \in E} |f(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in E,$$

où d est la métrique sur E . Définissons

$$d_{\mathcal{L}}(Q, Q') = \sup_{f \in \mathcal{L}} \left| \int_E f dQ - \int_E f dQ' \right|.$$

Montrer que $d_{\mathcal{L}}$ est une métrique sur l'ensemble des mesures de probabilités $\mathcal{M}_1(E)$. Montrer qu'une suite de probabilités Q_n converge étroitement vers une probabilité Q si et seulement si $d_{\mathcal{L}}(Q_n, Q) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice III.

Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard issu de 0 et on considère l'eds suivante

$$dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1-t} dt, \quad 0 < t < 1, \quad \text{avec} \quad X_0 = 0.$$

1. Etudier l'existence et l'unicité des solutions pour cette eds. Montrer ensuite que la solution est donnée par

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad t \in [0, 1].$$

En déduire que $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$ est un processus gaussien centré et calculer sa covariance.

2. On note $b_t := B_t - tB_1$, $0 \leq t \leq 1$. Justifier que $\{b_t\}_{t \in [0,1]}$ est un processus gaussien et calculer son espérance et sa covariance. Que peut-on remarquer ?
3. Soit $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $P(Y_j = 1) = P(Y_j = -1) = 1/2$ et on pose $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$. On introduit

$$z_n(t) := \left(S_{[nt]} + (nt - [nt])Y_{[nt]+1} - tS_n \right) / \sqrt{n}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La loi de z_n , notée Q_n , est une probabilité sur $C([0, 1])$. Montrer que Q_n converge étroitement vers la loi du pont brownien.