Université de Rennes 1 — Année 2014-2015
UFR Mathématiques — MIEE L1, Module AN1

Examen Terminal du 7 janvier 2015. Durée 2 heures.
Le sujet a 2 pages et 5 exercices indépendants.
Documents de cours, calculatrices, téléphones, ... sont interdits.
Toute les réponses doivent être justifiées soigneusement.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation.
Relisez vos copies ! Bon travail !

Exercice 1.

1. Démontrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.
2. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| \leqslant 1$ et $|z_2| \leqslant 1$. Montrer qu'au moins un des nombres complexes $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ est de module inférieur ou égal à $\sqrt{2}$.

Exercice 2.

Justifier l'existence et calculer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{1+x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\, dx$.

Exercice 3.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence et calculer

$$\lim_{x\to a} \frac{x\, g(a) - a\, g(x)}{x - a} .$$

Exercice 4.

1. Énoncer et démontrer un résultat concernant les valeurs d'une fonction h continue et positive, définie sur un intervalle $[a, b]$, ayant son intégrale sur $[a, b]$ nulle.
2. Soient $a < b$ deux réels et $f, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, avec $h \geq 0$. On veut montrer que

$$(\#) \quad \exists c \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad \int_a^b f(x)h(x)dx = f(c) \int_a^b h(x)dx.$$

   (a) Montrer que, lorsque $\int_a^b h(x)dx = 0$, l'assertion (#) est satisfaite. On suppose dans la suite de l'exercice que $\int_a^b h(x)dx \neq 0$.

   (b) Justifier l'existence de $x_0, x_1 \in [a, b]$ tels que $\forall x \in [a, b],\ f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$. En déduire que $\forall x \in [a, b],\ f(x_0)h(x) \leq f(x)h(x) \leq f(x_1)h(x)$.

   (c) Montrer que

$$f(x_0) \leq \frac{\int_a^b f(x)h(x)dx}{\int_a^b h(x)dx} \leq f(x_1).$$

   Déduire l'assertion (#) en utilisant les résultats de cours.

Tourner S.V.P.

Exercice 5.

1. Énoncer et démontrer un résultat sur la caractérisation de la monotonie utilisant le signe de la dérivée.
2. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\star) \quad x^n \ln x = 1.$$

(a) Étudier les variations de la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = x^n \ln x$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $(\star)$ admet une unique solution, que l'on notera x_n, et que $x_n \geqslant 1$.

(c) En partant de l'équation satisfaite par x_{n+1} montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}} \quad \text{et déduire que} \quad f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n).$$

En déduire que la suite (x_n) est décroissante, qu'elle converge vers une limite ℓ et que $\ell \geq 1$.

(d) Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n \ln x_n = +\infty$ et trouver une absurdité.

Que vaut ℓ ?