Université de Rennes 1 | Année 2014-2015
UFR Mathématiques | MIEE L1, Module AN1

# Contrôle continu du 5 décembre 2014. Durée : 2 heures

**Documents de cours, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables, ... sont interdits.**
**TOUTES les réponses doivent être JUSTIFIÉES.**
**Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation.**
**RELISEZ VOS COPIES !**

**Notations.** Dans toute la suite du devoir on notera $f''$ la dérivée de $f'$ et $g''$ la dérivée de $g'$.

**Question de cours**. Enoncer et démontrer le résultat du cours concernant la dérivabilité d'un produit de fonction et la formule donnant la dérivée dudit produit.

**Exercice**. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Justifier pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$ est bien définie pour tout entier $n \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que
$$\left|\int_0^1 t^n f(t)dt\right| \leq M \int_0^1 |t^n| dt.$$
3. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^n f(t)\, dt = 0.$$

**Problème**. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies par
$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2) \ \text{ et } \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Justifier que $g$ est dérivable deux fois sur son domaine de définition et que ses dérivées $g'$ et $g''$ sont continues sur le même domaine.
2. En utilisant les dérivées $g'$ et $g''$ dresser le tableau de variations de $g$. En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
3. Justifier d'abord que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ensuite qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$ ? Justifier que la dérivée $f'$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}^*$ :
$$f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}.$$
En déduire que $|f'(x)| \leq 1/2$ pour tout $x \geq 0$.
5. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour $x \geq 0$
$$|f(x) - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|x - \ln(2)|.$$
6. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2.$$
7. En utilisant la définition de la convergence d'une suite, montrer que la suite $(u_n)$ converge (on précisera sa limite) ?