Université de Rennes 1 — MIEE L1

Année 2014-2015 — Module AN1

Corrigé du contrôle continu 3
5 décembre 2014

Exercice

1. Comme les fonctions suivantes : $t \in [0,1] \mapsto t^n$ et $t \in [0,1] \mapsto f(t)$ sont continues alors leur produit est aussi continue sur $[0,1]$. Donc l'intégrale de cette fonction produit sur le segment $[0,1]$ est bien définie.
2. D'après la positivité de l'intégrale on a
$$\Big|\int_0^1 t^n f(t)dt\Big| \leq \int_0^1 |t|^n |f(t)|dt.$$
La fonction f est par hypothèse continue sur le segment $[0,1]$, donc elle atteint ses bornes et en particulier elle est bornée. Donc il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que
$$\forall t \in [0,1]; \quad |f(t)| \leqslant M.$$
Il en découle
$$\forall t \in [0,1]; \quad |t^n||f(t)| \leqslant M|t|^n$$
puis, par positivité de l'intégrale,
$$\int_0^1 |t|^n |f(t)|dt|t^n||f(t)| \leqslant \int_0^1 M|t|^n dt = M \int_0^1 |t|^n dt$$
d'où finalement
$$\Big|\int_0^1 t^n f(t)dt\Big| \leq M\int_0^1 |t|^n dt.$$
3. Par un calcul de primitive on obtient
$$\int_0^1 |t|^n dt = \int_0^1 t^n dt = \Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}\cdot$$
En combinant ce fait avec la question 2. on obtient, pour tout entier n, la majoration
$$\Big|\int_0^1 t^n f(t)dt\Big| \leq \frac{M}{n+1}\cdot$$
Or il est bien connu que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; donc en appliquant le théorème des gendarmes on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)dt = 0.$$

Problème

1. La fonction g s'écrit sous la forme $g = g_1 g_2 + g_3$, avec g_1, g_2 et g_3 sont définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes :

$$g_1(x) = (x-2), \quad g_2(x) = e^x, \quad g_3(x) = x+2.$$

Ces trois fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc d'après le cours g est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x) + g_3'(x) \\ &= e^x + (x-2)e^x + 1 \\ &= e^x(x-1) + 1. \end{aligned}$$

Par un argument similaire on déduit que la fonction g' est continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x.$$

Cette dernière fonction est aussi continue comme produit de fonctions continues.

2. On a vu que $g''(x) = xe^x$, donc le signe de $g''(x)$ est celui de x. Ceci nous donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g''(x)$		$-$	0	$+$	
g'		$\searrow$	0	$\nearrow$	
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Nous avons utilisé $g'(0) = 0$ qui implique d'après les variations de g' que $g'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}$ et en conséquence

$$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) \geqslant g(0) = 0.$$

3. Remarquons d'abord que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ vu que $e^x - 1 = 0$ ssi $x = 0$. Notons aussi que sur $\mathbb{R}^\star$ la fonction f se présente comme le quotient de deux fonctions continues et dérivables donc elle est à son tour continue et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, \quad f'(x) &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2}. \end{aligned}$$

Reste à étudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro. Ceci se fera avec les définitions. Pour la continuité en zéro il s'agit tout simplement de vérifier que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1.$$

A cet effet on rappelle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$$

(nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0) Donc par passage à l'inverse on déduit que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} \\
&= \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Quant à la dérivabilité en zéro, on doit étudier si la limite suivante existe ou non :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}\cdot$$

Par un calcul simple on trouve pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}\cdot$$

dont la limite en 0 est une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour enlever l'indétermination on applique deux fois la règle de l'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2e^x+xe^x} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot
\end{aligned}$$

(la première application donne à nouveau une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ », ce qui justifie une nouvelle application de la règle de l'Hôpital ; l'existence de la dernière limite entraîne alors l'existence et le calcul des deux autres). Ceci montre que f est dérivable en zéro avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Par les arguments standards déjà utilisés ci-dessus, f' coïncide sur $\mathbb{R}^\star$ avec une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, donc elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. Ainsi le problème se ramène à analyser la continuité et la dérivabilité de f' en zéro.

Continuité de f' en zéro : Il s'agit de démontrer que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2} = -\frac{1}{2}\cdot$$

Pour se faire on applique à deux reprises la règle de l'Hôpital comme suit :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2} &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{e^{2x}-e^x} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x-e^x}{2e^{2x}-e^x} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Dérivabilité de f' en zéro : Il s'agit de démontrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)+\frac{1}{2}}{x}.$$

Un calcul élémentaire montre que pour $x \neq 0$ on a

$$\frac{f'(x)+\frac{1}{2}}{x} = \frac{e^{2x}-2xe^x-1}{2x(e^x-1)^2}.$$

Comme dans le cas précédent pour enlever l'indétermination on va appliquer la règle de l'Hôpital mais cette fois-ci trois fois consécutives :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2xe^x-1}{2x(e^x-1)^2} &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2e^x-2xe^x}{(e^x-1)^2+2xe^x(e^x-1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2e^x-xe^x}{4(e^{2x}-e^x)+2x(2e^{2x}-e^x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}-3e^x-xe^x}{4(2e^{2x}-e^x)+2x(4e^{2x}-e^x)+2(2e^{2x}-e^x)} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Ceci montre bien que f' est dérivable en zéro et ainsi elle est dérivable partout sur $\mathbb{R}$.

4. Nous avons vu dans (1) que pour tout $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}.$$

En dérivant encore une fois on obtient pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-xe^x(e^x-1)^2-[(1-x)e^x-1]2e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^4} \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\Big(-x(e^x-1)-2[(1-x)e^x-1]\Big) \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\Big(e^x(x-2)+x+2\Big) \\
&= \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}.
\end{aligned}$$

Comme $e^x-1>0$ pour $x>0$ alors le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$, qui est positif d'après 2. Donc

$$\forall x>0, \quad f''(x) \geqslant 0.$$

Ceci entraîne que f' est croissante sur $[0,+\infty[$. Il s'ensuit que

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leq \lim_{x\to+\infty} f'(x).$$

Pour calculer $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ on écrit d'abord :

$$f'(x) = xe^{-x}\,\frac{\frac{1}{x}-1-\frac{1}{xe^x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

A ce stade on utilise les limites connues suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0,\ \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^{x}} = 0$$

qui donnent, couplées aux résultats sur les limites de sommes, produit et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

En conséquence, on trouve

$$\forall x \geqslant 0, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leqslant 0.$$

D'où,

$$\forall x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

5. Si $x = \ln 2$ alors l'inégalité devient une égalité. Maintenant soit $x \neq \ln 2$ et positif alors par le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un $c \in]x, \ln 2[$ tel que

$$f(x) - f(\ln 2) = (x - \ln 2)f'(c).$$

En utilisant la question 4., on obtient

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\ln 2)| &= |x - \ln 2||f'(c)| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - \ln 2|. \end{aligned}$$

Or $f(\ln 2) = \ln 2$, donc on aura

$$|f(x) - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|x - \ln 2|.$$

6. On va démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ln 2| \leq (\frac{1}{2})^n \ln 2.$$

Cette propriété est trivialement vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie à un ordre $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle reste aussi vraie à l'ordre $n + 1$. On écrit

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ln 2| &= |f(u_n) - f(\ln 2)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|. \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence on a

$$|u_n - \ln 2| \leq (\frac{1}{2})^n \ln 2.$$

Donc on obtient

$$|u_{n+1} - \ln 2| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} \ln 2.$$

7. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$ la condition $(\frac{1}{2})^n \ln 2 \leqslant \varepsilon$ équivaut, grâce notamment à la stricte croissance de ln et le fait que $-\ln(2) < 0$, à

$$n \geqslant -\frac{\ln(\ln 2) + \ln(\varepsilon)}{\ln 2}.$$

Soit N un entier positif vérifiant $N \geqslant -\frac{\ln(\ln 2)+\ln(\varepsilon)}{\ln 2}$. Vu ce qui précède et le résultat de la question précédente, on a, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ln 2| \leq \varepsilon$. On a donc démontré, à partir de la définition de la convergence des suites, que (u_n) converge vers $\ln 2$.