Université de Rennes 1 | MIEE L1
Année 2014-2015 | Module AN1

Corrigé du contrôle continu 2
7 novembre 2014

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. Alors $-x \in \mathbb{R}^\star$ et on a
$$f(-x) = \frac{|-x|}{-x} \cos(-x) = -\frac{|x|}{x} \cos(x)$$
car on sait que les fonctions valeur absolue et cosinus sont paires. Finalement on trouve donc $f(-x) = -f(x)$.
La fonction f est donc impaire.
2. Soit $x, x_0 \in \mathbb{R}$. D'après la première formule admise de l'énoncé on a
$$|\cos(x) - \cos(x_0)| = \left|-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|.$$
On sait qu'on a
$$0 \leqslant \left|\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \leqslant 1$$
et d'après la deuxième formule admise de l'énoncé on a
$$0 \leqslant \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{x-x_0}{2}\right| = \frac{|x-x_0|}{2}.$$
On déduit de ce qui précède qu'on a
$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leqslant 2.1.\frac{|x-x_0|}{2}$$
soit
$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leqslant |x - x_0|.$$
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |\cos(x) - \cos(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$
Soit donc ε un réel strictement positif. Posons $\alpha = \varepsilon$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - x_0| \leqslant \alpha$, on a, en utilisant le résultat de la question précédente,
$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leqslant |x - x_0| \leqslant \alpha = \varepsilon$$
soit $|\cos(x) - \cos(x_0)| \leqslant |x - x_0| \leqslant \varepsilon$. Le résultat demandé est démontré.
4. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $|x| = x$ d'où
$$f(x) = \frac{|x|}{x}\cos(x) = \cos(x).$$
D'après la question précédente, on en déduit que f est continue sur $]0, +\infty[$.

5. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n} > 0$ et donc d'après le calcul de la question précédente on a $f\left(\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Par ailleurs on sait que la suite $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   En outre, d'après la question 3., la fonction cos est continue en 0.
   D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit que la suite $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente, de limite $\cos(0) = 1$.
   Comme f est impaire, pour tout $n \geqslant 1$, on a
   $$f\left(-\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -\cos\left(\frac{1}{n}\right).$$
   Or on a montré que la suite $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ était convergente de limite 1. D'après les résultats du cours sur les opérations sur les suites, la suite $\left(-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite -1.
6. Reprenons les résultats de la question précédente : la suite $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ est strictement positive, converge vers 0 et vérifie que $(f(\frac{1}{n}))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1 ; par ailleurs la suite $(-\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ est strictement négative, converge vers 0 et vérifie que $(f(-\frac{1}{n}))_{n\geqslant 1}$ converge vers -1.
   Comme $-1 \neq 1$, ceci montre que f ne vérifie pas le critère séquentiel pour les limites de fonctions en 0. On en déduit que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 3.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a
   $$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$
   Ainsi on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. Or $\frac{1}{(n+1)^2}$ est strictement positif.
   On a donc démontré que pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc bien strictement croissante.
2. Soit $k \geqslant 2$. On a alors $k > 0$ et $k - 1 > 0$ d'où $k(k-1) > 0$. Par ailleurs on a $k(k-1) = k^2 - k$ et $-k \leqslant 0$ d'où $k(k-1) \leqslant k^2$. Finalement on a
   $$0 < k(k-1) \leqslant k^2$$
   d'où
   $$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}.$$
   Par ailleurs on a
   $$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}.$$
3. On a $u_1 = \frac{1}{1} = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1$ donc l'inégalité demandée est vraie pour $n = 1$.
   D'après la question précédente, on a, pour tout $k \geqslant 2$,
   $$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
   Soit $n \geqslant 2$. On déduit de ce qui précède qu'on a
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

Par ailleurs on a

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}.$$

On a donc

$$1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$$

soit

$$u_n\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

4. On a vu à la question précédente qu'on avait, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\leqslant 2-\frac{1}{n}$. Or pour $n\geqslant 1$, on a $-\frac{1}{n}\leqslant 0$, d'où $2-\frac{1}{n}\leqslant 2$. Ainsi pour tout $n\geqslant 1$, on a $u_n\leqslant 2$. Ceci montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée. On a vu par ailleurs à la première question que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ était croissante. Comme on sait qu'une suite croissante et majorée est convergente, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien convergente.

5. On a vu à la question précédente qu'on avait, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\leqslant 2$. Par le résultat du cours sur le passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit $\lim u_n\leqslant 2$ soit $\ell\leqslant 2$.

   Par ailleurs, (u_n) étant croissante, on a, pour tout $n\geqslant 2$, $u_n\geqslant u_2$. Or $u_2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. Ainsi pour tout $n\geqslant 2$, on a $u_n\geqslant\frac{5}{4}$. En appliquant encore une fois le résultat du cours sur le passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit $\lim u_n\geqslant\frac{5}{4}$ soit $\ell\geqslant\frac{5}{4}$.