AN1: Correction du Partiel 1

Exercice 3

1. On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$1+i = (x+iy)^2 \iff 1+i = (x^2-y^2)+2ixy \iff \left\{ \begin{array}{lll} 1 & = & x^2-y^2, \\ 1 & = & 2xy \end{array} \right. \qquad \text{(S)}$$

On multiplie la première ligne du système (S) par x^2 en tenant compte de la relation

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}$$

(qui découle de la deuxième ligne de (S)) ce qui donne :

$$x^2 = x^4 - \frac{1}{4} \iff x^4 - x^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

On obtient une équation du second degré en $X = x^2$ de discriminant $\Delta = 2 > 0$ admettant pour solutions

$$X^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Comme $X = x^2 \geq 0$ et qu'on a $1 - \sqrt{2} < 0$, une seule convient :

$$X = x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

On en déduit

$$x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

Si $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ alors d'après la deuxième ligne de (S) on a

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},$$

ce qui donne la première racine de $1+i$:

$$z=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Si $x=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ alors d'après la deuxième ligne de (S) on a

$$y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

ce qui donne la deuxième racine de $1+i$:

$$z=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Comme on a raisonné ici par conditions nécessaires, on peut a priori seulement dire pour l'instant que l'ensemble des racines carrées de $1+i$ est *inclus* dans l'ensemble à deux éléments

$$\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}.$$

Pour montrer que ce dernier ensemble est bien l'ensemble des racines carres de $1+i$, différents arguments sont possibles. On peut dire qu'on sait d'après le cours qu'un nombre complexe non nul a exactement deux racines carrés. On peut aussi vérifier, par le calcul, que les éléments de l'ensemble ci-dessus ont bien un carré égal à $1+i$. Cette dernière méthode, quoique plus longue, a l'avantage de permettre de détecter d'éventuelles erreurs de calculs.

2. Pour tout nombre complexe z, on a

$$z^2+2\,z-i=(z+1)^2-1-i$$

Notant δ une racine carre de $1+i$, on a donc

$$z^2+2\,z-i=(z+1)^2-\delta^2=(z+1+\delta)\,(z+1-\delta)$$

Ainsi, on a

$$z^2 + 2\,z - i = 0 \iff (z+1+\delta)\,(z+1-\delta) = 0$$

Un produit de nombre complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, d'où

$$(z+1+\delta)\,(z+1-\delta) = 0 \iff (z+1+\delta = 0 \text{ ou } z+1-\delta = 0).$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation proposé est $\{-1-\delta, -1+\delta\}$ soit, en remplaçant δ par une des valeurs trouvées précédemment,

$$\left\{-1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, -1-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.\right\}$$

Exercice 4

1. Soit z un nombre complexe. Si z_0 est une racine quatrième de $1-i\sqrt{3}$ (en particulier on a $z_0 \neq 0$), alors on a

$$z^4 = 1-i\sqrt{3} \iff z^4 = z_0^4 \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^4 = 1$$

$$\iff \frac{z}{z_0} \in \{e^{2ik\pi/4},\ k \in \{0,1,2,3\}\} = \{e^{ik\pi/2},\ k \in \{0,1,2,3\}\}$$

en utilisant le résultat du cours sur la description des racines n-èmes de l'unité. Il reste donc à déterminer une solution z_0. Pour cela, on écrit $1-i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

$$|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\theta}$$

où θ est déterminé modulo $2\,\pi$ par

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \text{d'où :} \quad \theta = -\frac{\pi}{3}\,[2\,\pi].$$

Finalement, en écrivant z_0 sous forme trigonométrique $z_0 = \rho\, e^{i\theta}$, on a

$$z_0^4 = \rho^4 e^{4\,i\theta} = 2e^{-i\pi/3}.$$

On en déduit une solution

$$z_0 = 2^{1/4} e^{-\frac{i\pi}{12}}$$

et la solution générale

$$z \in \{2^{1/4} e^{-\frac{i\pi}{12} + ik\pi/2}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}\}.$$

On peut écrire explicitement les racines

$$z_0 = 2^{1/4} e^{i\frac{-\pi}{12}},\ z_1 = 2^{1/4} e^{i\frac{5\pi}{12}},\ z_2 = 2^{1/4} e^{i\frac{11\pi}{12}},\ z_3 = 2^{1/4} e^{i\frac{17\pi}{12}}. \quad (\star)$$

Pour calculer la somme des racines voici deux méthodes possibles.
Méthode 1 : en notant :

$$\zeta_k = e^{2ik\pi/4} = e^{ik\pi/2}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

et

$$z_k = z_0 \zeta_k, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

l'ensemble des racines quatrièmes de $1 - i\sqrt{3}$ s'écrit donc

$$\{z_k, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}\}.$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{3} z_k = z_0 \sum_{k=0}^{3} \zeta_k = 0$$

car $\sum_{k=0}^{3} \zeta_k = 0$ d'après le cours.
Méthode 2 : on remarque que

$$\frac{11\pi}{12} = \pi + \frac{-\pi}{12}, \quad \frac{17\pi}{12} = \pi + \frac{5\pi}{12}$$

et on rappelle que $e^{i\pi} = -1$. En utilisant les reglès de multiplication des nombres complexes sous leur forme exponentielle, on trouve à partir des expressions dans $(\star)$ que $z_2 = -z_0$ et $z_3 = -z_1$. On en déduit que la somme $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$.