

Examen terminal
le 17 décembre 2013 à 8h00

L'épreuve dure **2** heures. Les exercices sont indépendants. Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés. Bon travail!!!

Exercice 1.

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $-3 + 4i$.
2. Déterminer les racines réelles ou complexes du polynôme $P(z) = z^2 + (1 - 2i)z - 2i$.

Exercice 2.

Déterminer, si elle existe, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$.

Exercice 3.

Soit f la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et sa parité éventuelle.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et donner l'expression de la dérivée f' là où elle est définie.
3. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f .
4. Calculer la dérivée seconde f'' et trouver les points où elle s'annule ainsi que les intervalles où elle garde un signe constant.
5. Montrer que $x = 0$ est un point de maximum global pour f . Existe-t-il un point de minimum global?
6. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et déterminer les asymptotes au graphe de f .
7. Tracer le graphe de f en indiquant les tangentes horizontales et les asymptotes.

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$ (Indication : on pourra faire une intégration par partie);
2. $\int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx$.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 5.

1. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x} ; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle avec conditions initiales suivante :

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 4x \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 2 \end{cases} .$$