Université de Rennes 1 — MIEE L1
Année 2013-2014 — Module AN1

**Corrigé de l'examen terminal**
**17 décembre 2013**

**Exercice 1.**
**1.** Cherchons les racines carrées sous la forme $z = x + iy$, avec $x, y$ réels. L'équation

$$z^2 = -3 + 4i$$

se développe :

$$(x^2 - y^2) + (2xy)i = -3 + 4i.$$

L'égalité des modules donne :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}.$$

On a donc les équations

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = -3 \\ x^2 + y^2 & = 5 \\ 2xy & = 4 \end{cases}$$

On trouve ainsi que $x = \pm 1, y = \pm 2$, et la troisième équation nous dit que $x$ et $y$ sont de même signe. Les deux racines carrés sont donc $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.
**2.** Le discriminant du polynôme est

$$\Delta = (1 - 2i)^2 - 4 * 1 * (-2i) = 1 - 4 - 4i + 8i = -3 + 4i.$$

Les deux racines du polynôme sont donc

$$\frac{-(1-2i) + (1+2i)}{2}, \frac{-(1-2i) - (1+2i)}{2},$$

c'est-à-dire $2i$ et $-1$.

**Exercice 2.**
Il suffit d'appliquer deux fois la règle de L'Hôspital :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} \\ = & \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} \\ = & \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} \\ = & \ 2. \end{aligned}$$

**Exercice 3.**
**1.** La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ étant une composition de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
La fonction $f$ est paire : en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x).$$

**2.** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant la composition de deux fonctions dérivables et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

**3.** Comme $e^{-x^2} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est donné par celui de $-2x$. Il s'ensuit que

$$f'(x) \geq 0, \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(x) < 0, \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Le tableau des variations est donné par,

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

**4.** La dérivée seconde de $f$ est donnée par

$$f''(x) = (-2xe^{-x^2})' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

Pour trouver les zéros de $f''$ on écrit

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le tableau de signe de $f''$ est donné comme suit,

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**5.** $f$ atteint un maximum local en $x = 0$ vu que $0$ est un point critique de $f$ et $f''(0) = -2 < 0$. De plus, ce maximum est global car

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 1 = f(0)$$

La fonction $f$ a pour minimum $0$ mais il n'est pas atteint en aucun point $x_0$ de $\mathbb{R}$ car si c'est le cas alors forcément $f'(x_0) = 0$. Or il y a seulement un point critique qui correspond a un maximum global.

**6.** Posons $X = -x^2$, alors

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0;$$

Il en découle que la droite des ordonnées $y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

**Exercice 4.**

**1.** Une intégration par parties suivie d'une décomposition en éléments simples montrent que

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} &= -\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} \\
&= \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} + \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx \\
&= \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} + \left[\ln \frac{x}{x+1}\right]_1^2 \\
&= \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} + \ln(2/3) - \ln(1/2) \\
&= 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3.
\end{aligned}$$

**2.** On écrit $xe^{-x^2/2} = -(-x)e^{-x^2/2}$ et donc pour tout $a > 0$ on a

$$\int_0^a xe^{-x^2/2}dx = -[e^{-x^2/2}]_0^a = 1 - e^{-a^2/2}.$$

Comme $\lim_{a\to\infty} e^{-a^2/2} = 0$ alors

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a xe^{-x^2/2}dx = 1 = \int_0^\infty xe^{-x^2/2}dx.$$

**Exercice 5.**
**1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le problème aux conditions initiales peut se réécrire :

$$(PC) : \begin{cases} y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{x(1+x^2)} : (E), \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

L'équation $(E)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients variables. La fonction $a : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que le second membre $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x^2)}$. On s'intéresse à $(E_h)$ l'équation homogène associée à $(E)$ :

$$(E_h) : y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Cherchons une primitive $A$ de $a$. On choisit $A(x) = \ln(|1+x^2|) = \ln(1+x^2)$.D'après le cours les solutions de $(E_h)$ sont de la forme :

$$x \mapsto Ke^{-A(x)}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R},$$

c'est à dire :

$$x \mapsto \frac{K}{1+x^2}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On va maintenant chercher une solution particulière de $(E)$ par la méthode de variation des constantes. Soit $f_{SP}$ une solution particulière de $(E)$ de la forme

$$f_{SP}(x) = \frac{K(x)}{1+x^2}.$$

On a

$$f'_{SP}(x) = \frac{K'(x)}{1+x^2} - 2x\frac{K(x)}{(1+x^2)^2}.$$

Comme $f_{SP}$ est solution de $(E)$ on a :

$$\frac{K'(x)}{1+x^2} - 2x\frac{K(x)}{(1+x^2)^2} + 2x\frac{K(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Par conséquant :

$$K'(x) = \frac{1}{x}.$$

On choisit $K(x) = \ln|x| = \ln(x)$. Les solutions de l'équation $(E)$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{K}{1+x^2} + \frac{\ln(x)}{1+x^2}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

Soit $f$ la solution de $(PC)$, on a
$$f(1) = \frac{K}{2} = 0,$$
donc $K = 0$. Par conséquent,
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$
est l'expression de la solution de $(PC)$.

**2.** On veut résoudre :
$$(PC) : \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 4x : (E) \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}.$$
L'équation $(E)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre continu sur $\mathbb{R}$. Soit $(E_h)$ l'équation homogène associée à $(E)$
$$(E_h) : y'' + 3y + 2y = 0,$$
et $(E_c)$ son équation caractéristique.
$$(E_c) : r^2 + 3r + 2 = 0.$$
Le discriminant de $(Ec)$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1 > 0$. Les solutions de $(E_c)$ sont donc
$$r_1 = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad r_2 = \frac{-3-1}{2} = -2.$$
D'après le cours les solutions de $(E_h)$ sont les fonctions de la forme :
$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
Cherchons maintenant une solution particulière de $(E)$. Comme le second membre est une fonction polynômiale de degré 1 et que le coefficient en $y$ dans $(E)$ est différent de 0 on chercher $f_{SP}$ solution particulière de la forme $f_{SP}(x) = \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :
$$f'_{SP}(x) = \alpha, \quad f''_{SP}(x) = 0.$$
Comme $f_{SP}$ est solution de $(E)$, on obtient :
$$3\alpha + 2(\alpha x + \beta) = 4x.$$
Par identification polynômiale, on trouve le système :
$$\begin{cases} 2\alpha & = & 4 \\ 3\alpha + 2\beta & = & 0 \end{cases}$$
Donc $\alpha = 2$ et $\beta = -3$. Par conséquent les solutions de $(E)$ sont de la forme :
$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} + 2x - 3, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
Soit $f$ la solution de $(PC)$ on a :
$$f(0) = A + B - 3 = -3.$$
De plus $f'(x) = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x} + 2$ donc
$$f'(0) = -A - 2B + 2 = 2.$$
Par conséquent on doit résoudre le système :
$$\begin{cases} A + B & = & 0 \\ A + 2B & = & 0 \end{cases}$$
ce qui donne $A = B = 0$. Donc $f(x) = 2x - 3$ est la solution de $(PC)$.