

**Examen terminal**  
**le 16 décembre 2013 à 14h00**

L'épreuve dure **2** heures. Les exercices sont indépendants. Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés. Bon travail!!!

**Exercice 1.**

On rappelle que  $\sqrt{289} = 17$ .

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe  $-15 + 8i$ .
2. Déterminer les racines réelles ou complexes du polynôme  $P(z) = z^2 + (3 + 2i)z + 5 + i$ .

**Exercice 2.**

Déterminer, si elle existe, la limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$ .

**Exercice 3.**

1. Effectuer la division euclidienne de  $-2x^2 + 6x - 7$  par  $2x - 1$ . En déduire que

$$\frac{-2x^2 + 6x - 7}{2x - 1} = -x + \frac{5}{2} - \frac{9}{2(2x - 1)}.$$

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 7}{2x - 1}$ .

2. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de  $f$ . Donner l'expression de la dérivée  $f'$  là où elle est définie.
3. Étudier le signe de  $f'(x)$ .
4. En déduire le tableau de variations de  $f$ .
5. Montrer que  $y = -x + \frac{5}{2}$  est asymptote au graphe de  $f$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  et  $x \rightarrow -\infty$ .
6. Existe-t-il des asymptotes horizontales? Une asymptote verticale? Justifier la réponse.
7. Tracer le graphe de  $f$  en indiquant les tangentes horizontales et les asymptotes.

**Exercice 4.**

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1} dx$  (Indication : on pourra faire un changement de variable);
2.  $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$ .

Tournez la page s.v.p.

### Exercice 5.

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} xy' - \frac{y}{x+1} = x \\ y(1) = 0 \end{cases} ;$$

2. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle avec conditions initiales suivante :

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} .$$