Université de Rennes 1 — MIEE L1
Année 2013-2014 — Module AN1

Corrigé de l'examen terminal
16 décembre 2013

Exercice 1.
On pose $(a+ib)^2 = -15+8i$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Cela implique :

$$a^2 - b^2 = -15; \quad 2ab = 8; \quad a^2 + b^2 = 17;$$

et donc $a = 1$, $b = 4$. Ainsi les racines carrées de $-15+8i$ sont $\pm(1+4i)$.
Le discriminant associé à P est $\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+i) = 9+12i-4-20-4i = -15+8i$.
Les racines de P sont donc

$$z = \frac{-3-2i \pm (1+4i)}{2},$$

d'où on obtient $z_1 = -1+i$ et $z_2 = -2-3i$.

Exercice 2.
D'après le cours, on a

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0.$$

Avec le changement de variable $y = x^2 - 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

Exercice 3.

1. On a

$$\begin{array}{rr|l}
 & -2\,x^2 + 6\,x - 7 & 2\,x - 1 \\ \cline{3-3}
- & (-2\,x^2 + x) & -x \\ \cline{2-2}
 & 5\,x - 7 & \\
- & (5\,x - \frac{5}{2}) & \frac{5}{2} \\ \cline{2-2}
 & -\frac{9}{2} &
\end{array}$$

avec $\deg\left(-\frac{9}{2}\right) < \deg(2\,x-1)$, donc la division euclidienne de $-2\,x^2+6\,x-7$ par $2\,x-1$ est $-2\,x^2+6\,x-7 = (2\,x-1)\left(-x+\frac{5}{2}\right) - \frac{9}{2}$. Il en résulte que $\frac{-2\,x^2+6\,x-7}{2\,x-1} = -x + \frac{5}{2} - \frac{9}{2\,(2\,x-1)}$.

2. La fonction f est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $2\,x-1 \neq 0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. La fonction f est une fraction rationnelle ; elle est

donc dérivable partout où elle est définie, soit sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{-2\,x^2+6\,x-7}{2\,x-1}\right)' \\
&= \frac{(-2\,x^2+6\,x-7)'\,(2\,x-1)-(-2\,x^2+6\,x-7)\,(2\,x-1)'}{(2\,x-1)^2} \\
&= \frac{(-4\,x+6)\,(2\,x-1)-(-2\,x^2+6\,x-7)\,2}{(2\,x-1)^2} \\
&= \frac{-8\,x^2+4\,x+12\,x-6+4\,x^2-12\,x+14}{(2\,x-1)^2} \\
&= \frac{-4\,x^2+4\,x+8}{(2\,x-1)^2} \\
&= 4\,\frac{-x^2+x+2}{(2\,x-1)^2}.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{4}{(2\,x-1)^2} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x^2+x+2$. Cette dernière expression étant un trinôme dont le coefficient dominant est négatif, elle est positive entre ses racines et négative en dehors. Soit Δ son discriminant : $\Delta = 1^2-4\times(-1)\times 2 = 9 = 3^2$. Les racines du trinôme étudié sont donc $\frac{-1\pm 3}{2\times(-1)} = \frac{1\pm 3}{2}$. Ainsi, f' est positive sur $[-1, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 2]$ et négative sur $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$, $f(x) = x\left(-1+\frac{5}{2\,x}-\frac{9}{2\,x\,(2\,x-1)}\right)$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Par continuité, $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(-2\,x^2+6\,x-7) = -\frac{9}{2}$, donc $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

5. Quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, $\quad (x \neq \frac{1}{2})$, $\quad (x \neq 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= -1+\frac{5}{2\,x}-\frac{9}{2\,x\,(2\,x-1)} \\
&\to -1,
\end{aligned}$$

donc le graphe de f admet la direction donnée par $y = -x$ comme direction asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$. Quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, $\quad (x \neq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}
f(x)-(-x) &= \frac{5}{2}-\frac{9}{2\,(2\,x-1)} \\
&\to \frac{5}{2},
\end{aligned}$$

donc la droite d'équation $y = -x+\frac{5}{2}$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ ainsi qu'en $-\infty$.
6. On a déjà vu que le graphe de f admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique ; il n'admet donc pas d'asymptote horizontale. On a déjà montré que $\lim_{\frac{1}{2}} |f(x)| = +\infty$, donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de f (des deux côtés).

Exercice 4.

1.
$$\int_0^{\ln(2)} e^x\sqrt{e^x-1}dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = [\frac{2}{3}x^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{3}$$
avec le changement de variable $u(x) = e^x - 1$, $u'(x) = e^x$.

2. La fonction xe^{-2x} est continue sur $\mathbb{R}$, donc la primitive est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $M > 0$
$$\int_0^M xe^{-2x}dx = \left[x\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^M - \int_0^M \frac{e^{-2x}}{-2}dx = -\frac{Me^{-2M}}{2} - \left[\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^M = -\frac{Me^{-2M}}{2} - \frac{e^{-2M}}{4} + \frac{1}{4}$$
grâce à une intégration par parties avec
$$\begin{cases} u(x) &= x, \quad v^{'}(x) &= e^{-2x}, \\ u^{'}(x) &= 1, \quad v(x) &= \frac{e^{-2x}}{-2}. \end{cases}$$
$$\int_0^\infty xe^{-2x}dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M xe^{-2x}dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{Me^{-2M}}{2} - \frac{e^{-2M}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
Ainsi l'intégrale impropre $\int_0^\infty xe^{-2x}dx$ converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 5.

1. (a) Il est évident que $y(x) \equiv 0$ est une solution de l'équation homogène $xy' - \frac{y}{x+1} = 0$. On cherche une solution qui ne s'annule pas et on écrit l'équation homogène sous la forme
$$xy' = \frac{y}{x+1} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$
On déduit que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$
$$\ln|y(x)| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c.$$
Alors la solution générale de l'équation homogène est
$$y_h(x) = k\frac{x}{x+1},\ k \in \mathbb{R},$$
bien définie sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, donc en particulier bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) La méthode de variation des constantes permet de trouver une solution particulière de l'équation initiale. On cherche une solution de la forme $f(x) = u(x)\frac{x}{x+1}$. Sa dérivée est $f'(x) = u'(x)\frac{x}{x+1} + u(x)\frac{1}{(x+1)^2}$. En remplaçant dans l'équation initiale on trouve $u'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, équation qui admet comme solution particulière $u(x) = x + \ln|x|$, bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi une solution particulière de l'équation initiale est
$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x+1}\ln(x),$$
qui est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) La solution générale de l'équation initiale est alors

$$y(x) = y_h(x) + f(x) = \frac{x}{x+1}(k + x + \ln(x)),\ k \in \mathbb{R}$$

qui est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) La condition initiale permet l'identification de la constante :

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(k+1) = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

et donc la solution recherchée est

$$y(x) = \frac{x}{x+1}(x - 1 + \ln(x)),$$

bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. (a) Pour trouver la solution générale de l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$, on écrit l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui admet une racine réele double $r = 2$. Alors la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda e^{2x} + \mu x e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

bien définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour trouver une solution particulière de l'équation initiale on remarque que le second membre est un polynôme de second degré. Nous allons donc chercher une solution particulière de la forme $f(x) = u_2x^2 + u_1x + u_0$. Ses dérivées sont $f'(x) = 2u_2x + u_1$ et $f''(x) = 2u_2$. On remplace dans l'équation et on trouve

$$2u_2 - 4(2u_2x + u_1) + 4(u_2x^2 + u_1x + u_0) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En identifiant les coefficients on déduit d'abord $u_2 = \frac{1}{4}$, ensuite $u_1 = \frac{1}{2}$ et enfin $u_0 = \frac{3}{8}$, autrement dit

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8},$$

bien définie sur $\mathbb{R}$.

(c) La solution générale de l'équation initiale est alors

$$y(x) = y_h(x) + f(x) = \lambda e^{2x} + \mu x e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

bien définie sur $\mathbb{R}$.

(d) Nous allons identifier les constantes en imposant les conditiona initiales :

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \frac{3}{8} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{8},$$

et comme $y'(x) = (2\lambda + \mu)e^{2x} + 2\mu x e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,

$$y'(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -2\lambda = \frac{3}{4}.$$

Ainsi la solution recherchée est

$$y(x) = -\frac{3}{8}e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8},$$

bien définie sur $\mathbb{R}$.