Université de Rennes 1 | MIEE L1
Année 2013-2014 | Module AN1 : Groupe 4

Corrigé du Contrôle continu 5
2 décembre 2013

Exercice 1.
La méthode la plus simple est de remarquer que $(e^{\sin(x)})' = \cos(x)e^{\sin(x)}$. Donc une primitive de la fonction à intégrer est $e^{\sin(x)}$. Ainsi

$$\int_0^1 \cos(x)e^{\sin(x)} = \left[e^{\sin(x)}\right]_0^1 = e^{\sin 1} - 1.$$

Une autre méthode serait de faire un changement de variable $t = \sin(x)$. Alors $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$, $x = g(t) = \arcsin(t)$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : [0, \sin(1)] \to \mathbb{R}$ et $g'(t) = \arcsin'(t) = 1/(\sin' \circ \arcsin(t)) = 1/(\cos(\arcsin(t)))$, donc

$$\int_0^1 \cos(x)e^{\sin(x)}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\sin(1)} f(g(t))g'(t)dt =$$
$$= \int_0^{\sin(1)} \cos(\arcsin(t))e^t \frac{1}{\cos(\arcsin(t))}dt = \int_0^{\sin(1)} e^t dt = \left[e^t\right]_0^{\sin(1)} = e^{\sin 1} - 1.$$

Exercice 2.
Il est clair que $y(x) \equiv 0$ est solution de l'équation homogène. Cherchons une solution $y \neq 0$. On écrit l'équation homogène sous la forme

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c \Leftrightarrow |y(x)| = e^c|x| \Leftrightarrow y(x) = kx,\ k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation homogène est $y_0(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation avec second membre on utilise la méthode des variation des constantes. On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = u(x)x$. Or $f'(x) = u'(x)x + u(x)$. En remplaçant dans l'équation avec second membre on trouve

$$u'(x)x + u(x) - \frac{u(x)x}{x} = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x(1+x)} \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$$

(on a utilisé ici la décomposition en éléments simples). On déduit que $u(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + c$ qui est bien définie sur $]0, +\infty[$. Ainsi une solution particulière de l'équation avec second membre est $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (en prenant $c = 0$, par exemple). La solution générale de l'équation avec second membre est la somme $y_0(x)+f(x)$ autrement dit la fonction

$$y(x) = kx + x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right),\ k \in \mathbb{R}, \qquad \text{définie sur }]0, +\infty[.$$

Pour identifier la constante k on impose $y(1) = 0$ donc $k - \ln(2) = 0$, d'où $k = \ln(2)$.

Exercice 3.

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)} = \frac{\frac{1}{x-2}}{\ln(x-2)}$$

est bien définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x-2 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \ln(x-2) \neq 0\} =]2, +\infty[\setminus \{3\} =]2, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Le domaine de définition de f est donc $D_f =]2, +\infty[\setminus \{3\} =]2, 3[\cup]3, +\infty[$. Compte tenu de l'indication donnée, il est immdiat qu'une primitive de f est

$$F(x) = \ln\left(\ln\left(x-2\right)\right)$$

qui est bien définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x-2 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \ln(x-2) > 0\}.$$

Or $\ln(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > 3$ et donc F est bien définie sur $]2, +\infty[\cap]3, +\infty[=]3 + \infty[$. Ainsi $D_F =]3 + \infty[$. L'intégrale est bien une intégrale impropre car la primitive de f n'est pas définie en $x = 3$. De plus elle est divergente car

$$\lim_{x \to 3+} \ln\left(x-2\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \to 3+} F(x) = \lim_{x \to 3+} \ln\left(\ln\left(x-2\right)\right) = \lim_{y \to 0+} \ln y = -\infty.$$

Ainsi

$$\int_3^4 f(x)dx = F(4) - \lim_{x \to 3+} F(x) = \ln(\ln(2)) - (-\infty) = +\infty.$$